Déterminants

Exercice 1. *Calcul de déterminants*

Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ **4)** $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

Exercice 2. *Calcul de déterminants*

Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$. Chercher une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On notera α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique, et on exprimera le déterminant en fonction de α et β.

2) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \cdots & a_1-b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 3)$ **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$ **7)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 3. *Suite de Fibonacci, Ensiee/Ensea 2015*

Soit (f_n) la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Calculer le déterminant de la matrice $M_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficient général $f_{|i-j|}$.

Exercice 4. *Factorisation de polynômes*

Déterminer les cas d'annulation des déterminants suivants, puis les calculer :

1) $\begin{vmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & n-x \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} a & b & c & \cdots & z \\ b & b & c & & z \\ c & c & c & & z \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z \end{vmatrix}$ **4)** $\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix}$

Exercice 5. *Calcul par dérivation*

1) Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.

Montrer que f est dérivable et que : $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.

2) Généraliser à un déterminant $n \times n$.

3) Application : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Exercice 6. $\det(A+(\alpha))$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que : $\det(A+\alpha U) = \det A + \alpha \sum$ cofacteurs de A.

2) En déduire la valeur de $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$,

a) pour $b \neq c$.

b) pour $b = c$.

Exercice 7. *Déterminant tridiagonal*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n-1}$ et $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \in (\mathbb{R}^{-*})^{n-1}$. Montrer que le déterminant suivant est strictement positif :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & (0) & \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. *Déterminant de Vandermonde*

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Le déterminant de Vandermonde associé aux a_i est : $V(a_1, \dots, a_n) = \det(a_i^{j-1})$.

1) Calculer et factoriser $V(a,b)$ et $V(a,b,c)$.

2) Pour $x \in \mathbb{K}$, montrer que $V(a_1, \dots, a_n, x) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (x - a_i)$.

3) En déduire l'expression générale de $V(a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 9. *Racines de l'unité*

On note $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\alpha = e^{i\pi/n}$ et D le déterminant $n \times n$: $D = \det(\omega^{(k-1)(l-1)})$.

1) Calculer D^2.

2) Montrer que $D = \prod_{k<\ell}(\omega^\ell - \omega^k) = \prod_{k<\ell}\left(\alpha^{k+\ell} \cdot 2i \sin \dfrac{\ell - k}{n}\pi\right)$.

3) Exprimer D sous forme trigonométrique.

Exercice 10. *Cosinus*

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Mettre le déterminant : $\det(\cos((j-1)\alpha_i))$ sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Exercice 11. $(x_i + y_j)^k$

Soit $k \leqslant n-1$ et $M = ((x_i + y_j)^k)$. Écrire M comme produit de deux matrices et calculer $\det M$.

Exercice 12. $P(i+j)$

Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $A = (P(i+j)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Développer $P(i+j)$ par la formule de Taylor et écrire A comme produit de deux matrices. En déduire $\det A$.

Exercice 13. *Problème d'interpolation de Lagrange*

Soit A un *anneau* commutatif, $x_1, \dots, x_n \in A$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1) Le déterminant de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$ est un élément inversible de A ;

2) Pour tous $y_1, \dots, y_n \in A$, il existe un unique polynôme $P \in A_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Donner un exemple d'anneau A et un problème d'interpolation dans A (en des points x_i distincts) n'ayant pas de solution.

Exercice 14. *Résultant*

Soient $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_pX^p$, et $Q = b_0 + b_1X + \ldots + b_qX^q$, avec $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$.

Le résultant de P et Q est : $\operatorname{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & \vdots & b_q & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}$ les positions non remplies correspondent à des zéros.

$$\underbrace{\longleftrightarrow}_{q} \quad \underbrace{\longleftrightarrow}_{p}$$

En considérant l'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ (U,V) & \longmapsto & UP + VQ, \end{cases}$ montrer que :

$$\operatorname{Res}(P,Q) \neq 0 \Leftrightarrow P \wedge Q = 1.$$

Application : CNS pour que le polynôme $P = X^4 + aX + b$ ait une racine multiple ?

Exercice 15. $\det(I - AB) = \det(I - BA)$

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$ (commencer par le cas où A est la matrice canonique de rang r).

Exercice 16. *Changements de signe*

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A' = ((-1)^{i+j}a_{ij})$. Comparer $\det A$ et $\det A'$.

Exercice 17. *Somme des colonnes*

Soit M une matrice carrée d'ordre n, et M' la matrice déduite de M en remplaçant, pour tout j, la j-ième colonne par la somme des colonnes de M d'indices différents de j. Comparer les déterminants de M et M'.

Exercice 18. $\det(A^2 + B^2)$

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

2) Chercher A, B ne commutant pas telles que $\det(A^2 + B^2) < 0$.

Exercice 19. *Déterminant par blocs*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Démontrer que $\det M = \det(A + B)\det(A - B)$.

Exercice 20. *Déterminant par blocs*

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible et $AC = CA$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det M = \det(AD - CB)$.

Exercice 21. *Combinaison linéaire des solutions*

Soit $(S) \Leftrightarrow AX = B$ un système linéaire de n équations à n inconnues de Cramer. Montrer que pour tous scalaires $c_1, \ldots, c_n$, on a :

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = -\frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \boxed{\quad A \quad} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ c_1 \cdots c_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 22. *Comatrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire. Montrer que $\operatorname{com} A$ est aussi triangulaire.

Exercice 23. *Comatrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier le rang de $\operatorname{com}(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 24. *Comatrice*

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Calculer $\mathrm{com}(\mathrm{com}\,A)$ dans le cas où A est inversible.

2) Si $\mathrm{rg}\,A \leqslant n-2$, démontrer que $\mathrm{com}\,A = 0$.

3) Si $\mathrm{rg}\,A = n-1$, démontrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{com}\,A) = 1$.

4) Dans le cas général, démontrer que $\mathrm{com}(\mathrm{com}\,A) = (\det A)^{n-2}A$.

Exercice 25. *Comatrice*

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps infini.

1) Si A et B sont inversibles, démontrer que $\mathrm{com}(AB) = (\mathrm{com}\,A)(\mathrm{com}\,B)$.

2) Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A-\lambda I$ et $B-\lambda I$ soient inversibles.

3) En déduire que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{com}\,A$ et $\mathrm{com}\,B$ le sont.

4) Reprendre les questions précédentes sans supposer $\mathbb{K}$ infini.

Exercice 26. *Système linéaire homogène*

On considère un système linéaire homogène : $(S) \Leftrightarrow AX = 0$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $n < p$ et $\mathrm{rg}\,A = n$.

1) Montrer qu'on peut compléter A en une matrice $B = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ inversible.

2) Montrer que les colonnes $n+1$ à p de ${}^t\mathrm{com}\,B$ constituent une base des solutions de (S).

3) AN : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0. \end{cases}$

Exercice 27. *Inégalité*

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que : $|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 28. $\prod a_{i\sigma(i)} = $ *cste*

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $a \neq 0$ tel que : $\forall\,\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = a$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Exercice 29. *Déterminants* 2×2 *imposés*

Soient a, b, c, d quatre vecteurs d'un ev E de dimension 2. On note det le déterminant dans une base fixée de E.

1) Démontrer que : $\det(a,b)\det(c,d) + \det(a,c)\det(d,b) + \det(a,d)\det(b,c) = 0$ (commencer par le cas où (a,b) est libre).

2) On donne six scalaires : $d_{ab}, d_{ac}, d_{ad}, d_{cd}, d_{db}, d_{bc}$ tels que $d_{ab}d_{cd} + d_{ac}d_{db} + d_{ad}d_{bc} = 0$. Montrer qu'il existe des vecteurs a, b, c, d tels que : $\forall\,x, y,\ d_{xy} = \det(x,y)$.

Exercice 30. *Décomposition d'un vecteur en dimension 3*

Soient a, b, c, d quatre vecteurs d'un ev E de dimension 3. On note det le déterminant dans une base fixée de E. Démontrer que : $\det(a,b,c)d = \det(a,b,d)c + \det(a,d,c)b + \det(d,b,c)a$.

Exercice 31. *Trace d'un endomorphisme*

Soit E un ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $u_1, \ldots, u_n$, n vecteurs de E. On note det le déterminant dans une base fixée de E. Démontrer que :

$$\det(f(u_1), u_2, \ldots, u_n) + \det(u_1, f(u_2), u_3, \ldots, u_n) + \ldots + \det(u_1, u_2, \ldots, f(u_n)) = \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)\,\mathrm{tr}(f).$$

Exercice 32. $\det(u+n)$

Soient $u, n \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, u inversible, n nilpotent, avec $u \circ n = n \circ u$.

1) Démontrer que $\det n = 0$.

2) Chercher le polynôme caractéristique de n. En déduire que $\det(\mathrm{id}_E + n) = 1$.

3) Démontrer que $\det(u+n) = \det u$.

Exercice 33. *Groupe $SL_n(\mathbb{K})$*

On note $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } \det M = 1\}$.

1) a) Démontrer que $SL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour le produit matriciel.

b) Démontrer que $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices : $I + \lambda E_{ij}$, $(j \neq i)$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ (transformer une matrice $M \in SL_n(\mathbb{K})$ en I par opérations élémentaires).

2) a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que M a une inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.

b) Démontrer que le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $I + E_{ij}$, $(j \neq i)$.

Exercice 34. *Déterminant de $X \mapsto AX$*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX. \end{cases}$ Calculer $\det f_A$.

Exercice 35. *Système unisolvent*

Soient E un ensemble quelconque et $f_1, \dots, f_n : E \to \mathbb{K}$ des fonctions.
Montrer par récurrence sur n que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^E$ si et seulement s'il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de E tels que $\det(f_i(x_j)) \neq 0$.

Exercice 36. *Polytechnique MP 2002*

Soit p un nombre premier et $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$. Montrer que le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ de coefficient général $a_{j-i \bmod p}$ vérifie : $\det(A) \equiv a_0 + \dots + a_{p-1} \pmod{p}$.
Indication : écrire $A = \sum_{k=0}^{p-1} a_k J^k$ et calculer A^p.

Exercice 37. *Centrale MP 2002*

Soit un déterminant symétrique réel d'ordre impair dont les coefficients sont entiers, les diagonaux étant de plus pairs. Montrer que ce déterminant est pair.

Exercice 38. *Formule de Cauchy-Binet*

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $q \in [\![1, \min(n,p)]\!]$. Pour $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ avec $1 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_q \leqslant n$ et $1 \leqslant y_1 < y_2 < \dots < y_q \leqslant p$, on note $\Delta_{X,Y}(M)$ le déterminant de la matrice $q \times q$ de terme général a_{x_i,y_j}.

1) Soient $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ avec $n \leqslant p$. Montrer que

$$\det(MN) = \sum_{\text{card } X = n} \Delta_{[\![1,n]\!],X}(M) \Delta_{X,[\![1,n]\!]}(N)$$

(considérer les deux membres comme des fonctions des colonnes de N).

2) Donner une formule pour $\det(MN)$ quand $n > p$.

3) Soient $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![1, \min(n,q)]\!]$. Montrer, pour $X \subset [\![1,n]\!]$ et $Y \subset [\![1,q]\!]$ avec $\text{card}(X) = \text{card}(Y) = r$: $\Delta_{X,Y}(MN) = \sum_{\text{card}(Z)=r} \Delta_{X,Z}(M) \Delta_{Z,Y}(N)$.

solutions

Exercice 1.

1) $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$.

2) $(a+b+c)^3$.

3) $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$.

4) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.

5) $-(a^3-b^3)^2$.

Exercice 2.

1) $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ où $\alpha\neq\beta$ sont les racines de $X^2-aX+bc=0$, $(n+1)(a/2)^n$ si $\alpha=\beta$.

2) $a^{n-3}(a-b)(a^2+ab-2(n-2)b^2)$.

3) 1.

4) $a_1a_2\dots a_n\left(1+\dfrac{b_1}{a_1}+\dots+\dfrac{b_n}{a_n}\right)$.

5) 0.

6) $\frac{1}{2}(-1)^{n(n-1)/2}n^{n-1}(n+1)$.

7) $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}(n-1)2^{n-2}$.

Exercice 3.

Retirer à la dernière ligne les deux lignes précédentes.

Il vient $\det(M_n)=-2\det(M_{n-1})$ pour $n\geqslant 3$, puis $\det(M_n)=-(-2)^{n-1}$ si $n\geqslant 1$.

Exercice 4.

1) $-x(1-x)(2-x)\dots(n-1-x)$.

2) $(x-a_1)\dots(x-a_n)(x+a_1+\dots+a_n)$.

3) $z(y-z)(x-y)\dots(a-b)$.

4) $\dfrac{V(a,b,c)V(x,y,z)}{(a+x)\dots(c+z)}$.

Exercice 5.

3) $\sin\alpha-\sin\beta-\sin(\alpha-\beta)$.

Exercice 6.

1) Développer.

2) a) $D(a-b,0,c-b)=(a-b)^n$ et $D(a-c,b-c,0)=(a-c)^n \Rightarrow D(a,b,c)=\dfrac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$.

b) $\det((a-b)I+bU)=(a-b)^n+nb(a-b)^{n-1}$.

Exercice 9.

1) $M^2=\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & n\\ \vdots & & \iddots & \\ 0 & n & & 0\end{pmatrix} \Rightarrow D^2=(-1)^{n-1}n^n$.

3) $n^{n/2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Exercice 10.

Polynômes de Tchebychev $\Rightarrow D=2^{(n-1)(n-2)/2}V(\cos\alpha_1,\dots,\cos\alpha_n)$.

Exercice 11.

$M=(x_i^{j-1})\times\left(\binom{k}{i-1}\,y_j^{k-i+1}\right)$

$\det M=0$ si $k<n-1$, $\det M=(-1)^{n(n-1)/2}\binom{n-1}{0}\dots\binom{n-1}{n-1}V(x_1,\dots,x_n)V(y_1,\dots,y_n)$ si $k=n-1$.

Exercice 12.

$A=\left(\dfrac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right)\times\left(P^{(i-1)}(j)\right)\Rightarrow \det A=(-1)^{n(n-1)/2}(a_{n-1}(n-1)!)^n$.

Exercice 13.

2) ctrex: $A = \mathbb{Z}$, $P(0) = 0$ et $P(2) = 1$.

Exercice 14.

$27a^4 = 256b^3$.

Exercice 16.

Ils sont égaux.

Exercice 17.

$\det M' = (-1)^{n-1}(n-1)\det M$.

Exercice 18.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

Exercice 23.

Si $\mathrm{rg}(A) = n$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n$. Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$. Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0$.

Exercice 26.

3) On complète par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{base} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 27.

Développer le produit. Il y a égalité si et seumement si A comporte un seul coefficient non nul par ligne et colonne, ou une ligne nulle.

Exercice 29.

2) Si $d_{ab} \neq 0$, prendre $c = -\dfrac{d_{bc}}{d_{ab}} a + \dfrac{d_{ac}}{d_{ab}} b$ et $d = \dfrac{d_{db}}{d_{ab}} a + \dfrac{d_{ad}}{d_{ab}} b$.

Exercice 30.

Si (a, b, c) est une base, décomposer d. Si $a = \lambda b + \mu c$, on obtient $0 = 0$.

Exercice 31.

Les deux membres sont n-linéaires alternés ; on vérifie la relation sur la base du déterminant.

Exercice 33.

2) b) $(I + E_{ij})^k = I + kE_{ij}$. Calculer le pgcd d'une ligne par opérations élémentaires à l'aide de Bézout. Ce pgcd vaut 1 sinon $M \notin SL_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 34.

$(\det A)^n$.

Exercice 36.

On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on considère $J = (\delta_{i,i+1 \bmod p})$. On a $J^p = I$ et $A = a_0 J^0 + \dots a_{p-1} J^{p-1}$ donc $A^p = (a_0^p + \dots + a_{p-1}^p) I$ car on est en caractéristique p, soit $A^p = (a_0 + \dots + a_{p-1}) I$.
On en déduit $\det(A) = \det(A)^p = (a_0 + \dots + a_{p-1})^p = a_0 + \dots + a_{p-1}$.

Autre méthode en restant dans $\mathbb{Z}$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{p,\sigma(p)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \dots a_{\sigma(p)-p \bmod p}.$$

Notons $x(\sigma) = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \dots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$ et c le cycle $(1, 2, \dots, p)$. Alors $x(\sigma) = x(c^{-k} \circ \sigma \circ c^k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le nombre de permutations distinctes que l'on obtient à σ fixé en faisant varier k est égal à 1 si σ et c commutent, et à p sinon, d'après la relation : $\mathrm{card}(\text{orbite}) \times \mathrm{card}(\text{stabilisateur}) = \mathrm{card}(\langle c \rangle) = p$. De plus, c et σ commutent si et seulement si $\sigma \in \langle c \rangle$ (facile), d'où

$$\det(A) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon(c^k) a_k^p \equiv a_0 + \dots + a_{p-1} \bmod p.$$

Exercice 37.

$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma \neq \sigma^{-1}$. Alors les termes associés à σ et σ^{-1} sont égaux car M est symétrique, donc la somme de ces deux termes est paire. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma = \sigma^{-1}$. Alors comme n est impair, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) = i$ donc le terme associé à σ est pair.