Applications linéaires

Propriétés élémentaires

Exercice 1. *Image d'une somme, d'une intersection*
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous-dire de $f(E_1+E_2)$, $f(E_1\cap E_2)$, $f^{-1}(F_1+F_2)$, $f^{-1}(F_1\cap F_2)$?

Exercice 2. *Effet sur les familles libres et génératrices*
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire.
1) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

Exercice 3. *Endomorphisme tel que tout vecteur non nul est propre*
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
1) Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2) Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.
3) Montrer que f est une homothétie.

Exercice 4. *Applications $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}$*
On considère que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
1) Donner une base de $\mathbb{C}$.
2) Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ peut se mettre sous la forme : $f(z) = az + b\overline{z}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
3) CNS sur a et b pour que f soit bijectif ?

Exercice 5. $\mathcal{L}(E \times F)$
Est-il vrai que $\mathcal{L}(E \times F)$ et $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(F)$ sont isomorphes ? (E et F espaces vectoriels de dimensions finies).

Exercice 6. *Permutation de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$*
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ (groupe symétrique) et $f_\sigma : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$
On munit $\mathbb{K}^n$ de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.
1) Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2) Soit φ un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}^n$.
a) Montrer que la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est invariante par φ (étudier $\varphi(e_i^2)$ et $\varphi(e_i \times e_j)$).
b) En déduire qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\varphi = f_\sigma$.
3) Montrer que $\{0\}$, $D = \mathbb{K}(1, \dots, 1)$, $H = \{(x_1, \dots, x_n) \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $\mathbb{K}^n$ sont les seuls sev stables par tous les endomorphismes f_σ.

Exercice 7. *Somme directe d'endomorphismes*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, …, $u_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
1) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout i : $u_{|E_i} = u_i$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(u_n)$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(u_n)$.

Projections

Exercice 8. *Barycentre de projections*
Soient p, q deux projections de même base H et de directions F, G. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est encore une projection de base H.

Exercice 9. *Valeurs propres d'une projection*
Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{-1\}$, $\mathrm{id}_E + \lambda p$ est un isomorphisme de E.

Exercice 10. *Projections ayant même base ou même direction*
Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projections.
1) Montrer que p et q ont même base si et seulement si : $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2) Donner une condition analogue pour que p et q aient même direction.

Exercice 11. *Somme de deux projecteurs*
Soient p, q deux projections. Montrer les équivalences :
$p + q$ est une projection $\Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Base}(p) \subset \mathrm{Dir}(q)$ et $\mathrm{Base}(q) \subset \mathrm{Dir}(p))$.
Chercher alors la base et la direction de $p + q$.

Exercice 12. *$f \circ g = f$ et $g \circ f = g$*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Trouver tous les couples (f, g) d'endomorphismes de E tels que : $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

Exercice 13. *$f \circ g = \mathrm{id}$*
Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$. Montrer que $g \circ f$ est une projection et déterminer ses éléments.

Exercice 14. *Projection $p + q - q \circ p$*
Soient p, q deux projections telles que $p \circ q = 0$. Montrer que $p + q - q \circ p$ est une projection, et déterminer ses éléments.

Exercice 15. *Endomorphisme de rang 1*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
Montrer que : $\lambda = 1 \Leftrightarrow \mathrm{id} - f$ est non injective $\Leftrightarrow \mathrm{id} - f$ est non surjective (même en dimension infinie).

Exercice 16. *Relation d'ordre sur les projecteurs*
On munit l'ensemble des projections d'un ev E de la relation : $p \preccurlyeq q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$.
1) Montrer que c'est une relation d'ordre.
2) Soient p, q deux projections permutables. Montrer que $\sup(p, q) = p + q - p \circ q$ et $\inf(p, q) = p \circ q$.

Exercice 17. *Commutant d'une projection*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G. Soit $E_p = \{f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f \circ p = p \circ f\}$. Quelle est la dimension de E_p ?

Exercice 18. *Expressions analytiques*
Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{X = (x, y, z)$ tq $x + 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}(U = (1, 1, 1))$.
1) Vérifier que $F \oplus G = E$.
2) Soit s la symétrie de base F de direction G et $X = (x, y, z)$. Déterminer $s(X)$.

Exercice 19. *Trace nulle*
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et A une partie finie de $GL(E)$ stable par composition. On pose $u = \sum_{f \in A} f$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Rang

Exercice 20. *Applications du thm du rang*
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
1) Montrer que si H est un sev de E, alors $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \mathrm{Ker}\, f)$.
2) Montrer que si K est un sev de F, alors $\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$.

Exercice 21. *Application du thm du rang*
Soient E, F deux ev de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u + v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$ (considérer $w = u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)}$).

Exercice 22. *Rang de $f \circ g$*

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir :

1) $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.

2) $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f)$.

3) $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim E \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.

Exercice 23. $f \circ g = 0$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 24. $f \circ g = 0$ *et* $f + g \in GL(E)$

Soit E de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$.
Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$.

Exercice 25. $f \circ f = 0$ *et* $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}$

1) Soit E un $\mathbb{K}$-ev quelconque et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $f^2 = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

2) Réciproquement, on suppose E de dimension finie et on considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. Montrer ...

a) $f^2 = 0$.

b) $\forall x \in E$, il existe $y, z \in F$ uniques tels que $x = y + f(z)$.

c) Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 26. *Rang de $f + g$*

Soient E, F deux ev, E de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Démontrer que $\operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

2) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_F\}$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.

Exercice 27. *Somme de projecteurs*

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs tels que $p_1 + \ldots + p_n = \mathrm{id}_E$.

1) Montrer que $\operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{rg}(p_i)$.

2) Montrer que $E = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im}(p_n)$.

Exercice 28. *Groupe fini d'endomorphismes, X MP* 2001*

Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{R}^n)$ et $F = \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - \mathrm{id})$.
Montrer que $\operatorname{card}(G) \times \dim(F) = \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(g)$.

Image et noyau

Exercice 29. $f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 30. *Supplémentaire d'un hyperplan*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H = \operatorname{Ker} f$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$.

2) Soit $u \in E \setminus H$ et $F = \operatorname{vect}(u)$. Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 31. *CNS pour que* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *soient supplémentaires*

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

(2) $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

(3) $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

(4) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(5) $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 32. $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$

Soient E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$. Montrer que les sommes sont directes.

Exercice 33. *f tq $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont imposés*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H, K deux sev fixés de E.

1) A quelle condition existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = H$ et $\operatorname{Ker} f = K$?

2) On note $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} f = H \text{ et } \operatorname{Ker} f = K\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un groupe pour $\circ$ si et seulement si $H \oplus K = E$.

Exercice 34. *Noyaux itérés*

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$.

1) Montrer que la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion et que la suite (I_k) est décroissante.

2) Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \ldots = N_{p+k} = \ldots$

3) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.

4) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

5) Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.

Équations algébriques

Exercice 35. $f^2 = -\operatorname{id}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\operatorname{id}_E$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $u \in E$, on pose $zu = xu + yf(u)$.

1) Montrer qu'on définit ainsi une structure de $\mathbb{C}$-ev sur E.

2) En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

Exercice 36. $f^3 = \operatorname{id}$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \operatorname{id}_E$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}) = E$.

2) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}) = \operatorname{Im}(f^2 + f + \operatorname{id})$ et $\operatorname{Im}(f - \operatorname{id}) = \operatorname{Ker}(f^2 + f + \operatorname{id})$.

Exercice 37. *Endomorphisme cyclique*

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $u \in E$ tel que la famille $(f^k(u))_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E.

1) Montrer que $(u, \ldots, f^{n-1}(u))$ est une base de E (considérer p maximal tel que $\mathcal{F} = (u, \ldots, f^{p-1}(u))$ est libre, et prouver que $f^k(u)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier k).

2) Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.

Exercice 38. *Endomorphisme cyclique*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \langle f^k(x),\ k \in \mathbb{N} \rangle$. Si f est cyclique et F est un sous-espace vectoriel stable par f, montrer que $f_{|F}$ est aussi cyclique.

Exercice 39. *$u^2 = 0$ en dimension 3*

Soit E un ev de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ et $a \in E$ tels que : $\forall\, x \in E,\ u(x) = f(x)a$.

Exercice 40. *$(u, x, f(x))$ liée*

Soit E un ev de dimension supérieure ou égale à 3 et $u \in E \setminus \{0\}$. Trouver tous les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\forall\, x \in E$, la famille $(u, x, f(x))$ est liée.

Exercice 41. *$f^2 = 0 \Rightarrow f = g \circ h$ avec $h \circ g = 0$*

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

Exercice 42. $f^3 = 0$

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$.

1) Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim E$.

2) Montrer que $2 \operatorname{rg} f^2 \leqslant \operatorname{rg} f$ (appliquer le théorème du rang à $f_{|\operatorname{Im} f}$).

Exercice 43. *Endomorphisme nilpotent*

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1) Soit $u \in E \setminus \operatorname{Ker} f^{p-1}$. Montrer que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.

2) En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.

3) Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)\dots$

a) en dimension finie.

b) pour E quelconque.

4) Dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$, soient f, g de matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que f est nilpotent, $g \in GL(\mathbb{K}^2)$, mais $f + g \notin GL(\mathbb{K}^2)$.

Exercice 44. *Endomorphisme localement nilpotent*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\exists p_x \in \mathbb{N}$, tq $f^{p_x}(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 45. $g \mapsto f \circ g - g \circ f$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie où $\mathbb{K}$ est un coprs de caractéristique nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice n. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & f \circ g - g \circ f. \end{cases}$

1) Montrer que $\varphi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que φ est nilpotente.

2) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de φ.

Composition

Exercice 46. $f \circ g \circ f = f$ *et* $g \circ f \circ g = g$

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

2) Montrer que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Exercice 47. *Thms de factorisation*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(G)$ finie.

1) Soient $u \in \mathcal{L}(F, E)$ et $v \in \mathcal{L}(G, E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(G, F)$ tel que $v = u \circ h$ si et seulement si $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$.

2) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(G, F)$ tel que $u = h \circ v$ si et seulement si $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u$.

Exercice 48. *Isomorphisme* $\circ$ *projecteur*

Soient E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = g \circ p$.

2) Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = p \circ g$.

Exercice 49. *Dimension des* g *tq* $f \circ g = 0$ *et/ou* $g \circ f = 0$

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $K = \operatorname{Ker} f$, $I = \operatorname{Im} f$, $\mathcal{K} = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$ et $\mathcal{I} = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } g \circ f = 0\}$.

1) Montrer que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{I}$ sont des sev de $\mathcal{L}(E)$.

2) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer : $g \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset K$, et : $g \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g \supset I$.

3) a) Montrer que l' application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, K) \\ g & \longmapsto & g^{|K} \end{cases}$ est un isomorphisme d'ev. En déduire $\dim \mathcal{K}$.

b) Chercher de même $\dim \mathcal{I}$ en introduisant un supplémentaire I' de I.

c) Chercher aussi $\dim(\mathcal{K} \cap \mathcal{I})$.

Exercice 50. *Centrale MP 2001*

Soit f un endomorphisme donné de E de dimension n et $F = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } g \circ f = f \circ g = 0\}$. Trouver la dimension de F.

Exercice 51. *Rang de $f \mapsto u \circ f \circ v$*

Soit E un ev de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $f \mapsto u \circ f \circ v$.

L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

Exercice 52. *Centre de $\mathcal{L}(E)$*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(E)$ est : $Z = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Si $(x, f(x))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(x) = x$ et $g \circ f(x) = 0$.

2) En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.

3) Déterminer $Z' = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

Exercice 53. *Éléments réguliers dans $\mathcal{L}(E)$*

Soient E, F des ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Montrer que : (f est injectif) $\Leftrightarrow$ ($\forall\, g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$).

2) Montrer que : (f est surjectif) $\Leftrightarrow$ ($\forall\, g \in \mathcal{L}(F)$, $g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0$).

Exercice 54. *Sous algèbres*

Soit E un ev de dimension finie et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que si $f \in \mathcal{A}$ et f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{A}$ (on pourra étudier l'application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$: $g \mapsto f \circ g$).

Exercice 55. *Idéaux de $\mathcal{L}(E)$*

E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$ est un sev $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall\, f \in \mathcal{I}$, $\forall\, g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g \in \mathcal{I}$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche.

1) Montrer que si $f \in \mathcal{I}$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$, alors $g \in \mathcal{I}$.

2) Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{I}$. Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Im}(f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2) = \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$.

3) Soit $f \in \mathcal{I}$ tel que $\operatorname{rg}(f)$ soit maximal.
Montrer que $\mathcal{I} = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f\} = \{f \circ g \text{ tq } g \in \mathcal{L}(E)\}$.

Exercice 56. *Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$*

Soit E un ev de dimension n et $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ un automorphisme d'algèbre. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de E, (φ_{ij}) la base de $\mathcal{L}(E)$ associée ($\varphi_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$) et $\psi_{ij} = \Phi(\varphi_{ij})$.

1) Simplifier $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell}$.

2) En déduire qu'il existe $u_1 \in E \setminus \{0\}$ tel que $\psi_{11}(u_1) = u_1$.

3) On note $u_i = \psi_{i1}(u_1)$. Montrer que $\psi_{ij}(u_k) = \delta_{jk} u_i$ et en déduire que (u_i) est une base de E.

4) Soit $f \in GL(E)$ définie par : $f(e_i) = u_i$. Montrer que : $\forall\, g \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$.

Exercice 57. *Commutants itérés*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $\mathcal{C}_i = \operatorname{Ker} \varphi^i$ ($\mathcal{C}_0 = \{0\}$, $\mathcal{C}_1$ est le commutant de u, $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

1) Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.

2) Montrer que $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

solutions

Exercice 4.

3) $|a| \neq |b|$.

Exercice 5.

Non, ils n'ont pas même dimension si $E \neq \{0\}$ ou $F \neq \{0\}$.

Exercice 12.

$f^2 = f \circ g \circ f = f \circ g = f$ donc f est une projection. g idem.
$f \circ g = f$ donc $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ et par symétrie, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.
Réciproquement, si f, g sont deux projections de même direction, alors $f \circ g$ et f coïncident sur la base et la direction de g, donc sont égales. De même, $g \circ f = g$.

Exercice 13.

Direction $= \operatorname{Ker} f$ et Base $= \operatorname{Im} g$.

Exercice 14.

Direction $= \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et Base $= \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Exercice 15.

Si $\lambda \neq 1$, $(\mathrm{id} - f) \circ ((1-\lambda)\,\mathrm{id} + f) = ((1-\lambda)\,\mathrm{id} + f) \circ (\mathrm{id} - f) = (1-\lambda)\,\mathrm{id}$, donc $\mathrm{id} - f$ est bijective.

Exercice 18.

2) $\begin{cases} 2x' = x - 2y - z \\ 2y' = -x - z \\ 2z' = -x - 2y + z. \end{cases}$

Exercice 19.

Si $A = \varnothing$ c'est évident.
Sinon, A est un sous-groupe de $GL(E)$ donc $\dfrac{u}{\operatorname{card} A}$ est un projecteur et $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{card}(A)\operatorname{rg}(u)$.

Exercice 24.

$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \Rightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant \dim E$.
$f + g$ est surjective $\Rightarrow \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E \Rightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geqslant \dim E$.

Exercice 25.

2) c) $g(x) = z$.

Exercice 26.

2) $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_F\}$ et $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_F\}$ et $\forall\, x, y,\ \exists\, z$ tq $f(x) + g(y) = (f+g)(z)$.
$\Rightarrow$: donc $f(x - z) = g(z - y) = 0$. Pour $y = 0$: $x = (x - z) + z \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.
$\Leftarrow$: soient $x = x_f + x_g$ et $y = y_f + y_g$: Alors $f(x) + g(y) = f(x_g) + g(y_f) = (f+g)(x_g + y_f)$.

Exercice 28.

Soit $p = \dfrac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} g$. Alors $g \circ p = p$, pour tout $g \in G$ donc $p^2 = p$, $F \subset \operatorname{Im} p$ et si $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$ d'où $g(x) = x$ pour tout $g \in G$ c'est-à-dire $x \in F$. Donc $F = \operatorname{Im} p$ et $\dim F = \operatorname{rg}(p) = \operatorname{tr}(p)$ (trace d'un projecteur).

Exercice 33.

1) $\dim H + \dim K = \dim E$.

2) Si H et K ne sont pas supplémentaires alors $\mathcal{E}$ n'est pas stable pour $\circ$.

Exercice 40.

$f(x) = \alpha x + \beta(x) u$, $\beta \in E^*$.

Exercice 41.

$g =$ une projection sur $\operatorname{Im} f$ et $h = f$.

Exercice 43.

3) a) $(f+g)(x) = 0 \Rightarrow f^k(x) + g \circ f^{k-1}(x) = 0$. Pour $k = p$: $f^{k-1}(x) = 0$, puis pour $k = p-1$: $f^{k-2}(x) = 0$, etc, jusqu'à $x = 0$.

b) Même principe sur l'équation : $(f+g)(x) = y$.
On obtient : $(f+g)^{-1} = g^{-1} \circ (\mathrm{id} - g^{-1} \circ f + g^{-2} \circ f^2 - \ldots + (-1)^{p-1} g^{1-p} \circ f^{p-1})$.

Exercice 46.

1) $u = (u - g \circ f(u)) + g \circ f(u)$.

2) $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$ et $f = (f \circ g) \circ f \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f \circ g) = f(\operatorname{Im} g)$.

Exercice 49.

3) c) $\dim \mathcal{K} = (\dim E)(\dim \operatorname{Ker} f) = \dim \mathcal{I}$, $\dim(\mathcal{K} \cap \mathcal{I}) = (\operatorname{rg} f)^2$.

Exercice 50.

On veut $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Im} f$ donc g est entièrement définie par sa restriction à un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$, application linéaire à valeurs dans $\operatorname{Ker} f$.
On en déduit $\dim F = (\operatorname{codim} \operatorname{Im} f)(\dim \operatorname{Ker} f) = (\dim \operatorname{Ker} f)^2$.

Exercice 51.

$(\operatorname{rg} u)(\operatorname{rg} v)$.

Exercice 56.

1) $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell} = \delta_{jk} \psi_{i\ell}$.

2) ψ_{11} est un projecteur non trivial.

3) Si $\sum \lambda_k u_k = 0$, alors en appliquant ψ_{1j} : $\lambda_j u_1 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$.

4) Décomposer g sur la base (φ_{ij}).

Exercice 57.

1) $\varphi(v \circ w) = \varphi(v) \circ w + v \circ \varphi(w)$.

2) Par récurrence $\varphi^n(v \circ w) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k(v) \circ \varphi^{n-k}(w)$ donc si $v \in \mathcal{C}_p$ et $w \in \mathcal{C}_q$ alors $v \circ w \in \mathcal{C}_{p+q-1}$.