

Suites récurrentes linéaires

Exercice 1. Ensi Chimie P' 93

- 1) Résoudre $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$, $u_0 = a$, $u_1 = b$.
- 2) Si $a = 0$, trouver $\lim u_n$.
- 3) Résoudre : $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$.

Exercice 2. Équations de récurrence linéaire

- 1) Résoudre : $u_{n+2} - u_n = n - 1$, $u_0 = u_1 = 0$.
- 2) Résoudre : $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$.

Exercice 3. Système récurrent

On donne u_0, v_0 . Résoudre le système :
$$\begin{cases} 5u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ 5v_n = 2v_{n-1} + 3u_{n-1}. \end{cases}$$

Exercice 4. Caractérisation des suites polynomiales

Soit (u_n) une suite de réels. On définit les suites dérivées de (u_n) :

$$(u'_n) = (u_{n+1} - u_n), \quad (u''_n) = (u'_{n+1} - u'_n), \quad \dots, \quad (u_n^{(k+1)}) = (u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}).$$

- 1) Exprimer $u_n^{(k)}$ en fonction de $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est polynomiale si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n^{(k)}) = (0)$.

Exercice 5. Nombre de nombres ne comportant pas 13

Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.

- 1) Montrer que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.
- 2) Calculer T_n en fonction de n .

Exercice 6. $(\sqrt{3} + 1)^{2n+1} - (\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$

On note $x_n = (\sqrt{3} + 1)^{2n+1}$, $y_n = (\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$, et $z_n = \lfloor x_n \rfloor$.

- 1) Montrer que $z_n = x_n - y_n$.
- 2) En déduire que 2^{n+1} divise z_n .

solutions

Exercice 1.

1) $u_n = \frac{1}{3}((a + 2b) + 2(a - b)(-\frac{1}{2})^n)$.

3) $v_n = \lambda\mu^{(-\frac{1}{2})^n}$.

Exercice 2.

1) $u_n = \frac{1}{4}n^2 - n + \frac{3}{8}(1 - (-1)^n)$.

2) $u_n = \frac{1}{3}(n - 1) + aj^n + bj^{2n}$.

Exercice 3.

$$2u_n = u_0 + v_0 + (-\frac{1}{5})^n(u_0 - v_0), \quad 2v_n = u_0 + v_0 - (-\frac{1}{5})^n(u_0 - v_0).$$

Exercice 4.

1) $u_n^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} u_{n+p}$.

Exercice 5.

2) $6T_n = (3 + \sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n + (3 - \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n$.