Propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 1. *Morphismes de* $\mathbb{R}$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.
1) Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
2) Montrer que f est une application croissante.
3) En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2. *Parties denses*
Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :
(1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, a, b \in A$ tq $a < x < b$,
(2) $\forall\, a, b \in A,\ \exists\, x \in A$ tq $a < x < b$.
Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Parties denses*
Soir A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A \cap]0, 1[\neq \varnothing$.

Exercice 4. *Sous-groupes de* $\mathbb{R}$
Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$. On pose $H^{+*} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$, et $\alpha = \inf(H^{+*})$.
1) Si $\alpha \in H^{+*}$, montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
2) Si $\alpha \notin H^{+*}$, montrer que $\alpha = 0$ et en déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. *Partie entière*
1) Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{a+1}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \dfrac{a+b-1}{b} \right\rfloor = a$.
2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{a+1}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \dfrac{a+b-1}{b} \right\rfloor = \lfloor a \rfloor$.

Exercice 6. *Nombres irrationnels*
Soit $a \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout rationnel $r = p/q$: $|r - \sqrt{a}| \geqslant Cq^{-2}$.

Exercice 7. *Nombres irrationnels*
Soient $a, b \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ si et seulement si $a^2 - b$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

solutions

Exercice 5.

1) $a = bq + r$: $S = \underbrace{q + q + \ldots + q}_{b-r} + \underbrace{(q+1) + \ldots + (q+1)}_{r} = bq + r = a$.

Exercice 6.

Pour $r < 0$, on a $|r - \sqrt{a}| \geqslant q^{-2}$.
Pour $r \geqslant 0$, on pose $a = m/n$: $|r^2 - a| = |p^2/q^2 - m/n| \geqslant 1/nq^2$.
Donc $|r - \sqrt{a}| \geqslant 1/(nq^2|r + \sqrt{a}|) \geqslant 1/(n\sqrt{a}q^2)$.

Exercice 7.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow b + 4xy - 4\sqrt{bxy} = (x + y - a)^2$.
$\Rightarrow$: $bxy = r^2 \Rightarrow \sqrt{b}(1 - 2r/b) = x + y - a \Rightarrow r = \frac{1}{2}b$ et $x + y = a \Rightarrow (x - y)^2 = a^2 - b$.
$\Leftarrow$: $a^2 - b = u^2$. On prend $x = \frac{1}{2}(a + u)$ et $y = \frac{1}{2}(a - u) \Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$.