

Propriétés de \mathbb{R}

Exercice 1. Morphismes de \mathbb{R}

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

- 1) Montrer : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x$.
- 2) Montrer que f est une application croissante.
- 3) En déduire que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2. Parties denses

Soit A un sous-anneau de \mathbb{R} . Montrer que A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $A \cap]0, 1[\neq \emptyset$.

Exercice 3. Sous-groupes de \mathbb{R}

Soit H un sous-groupe additif de \mathbb{R} , $H \neq \{0\}$. On pose $H^{+*} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$, et $\alpha = \inf(H^{+*})$.

- 1) Si $\alpha \in H^{+*}$, montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
- 2) Si $\alpha \notin H^{+*}$, montrer que $\alpha = 0$ et en déduire que H est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 4. Partie entière

- 1) Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = a.$$
- 2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

Exercice 5. Nombres irrationnels

Soit $a \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout rationnel $r = p/q$: $|r - \sqrt{a}| \geq Cq^{-2}$.

Exercice 6. Nombres irrationnels

Soient $a, b \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ si et seulement si $a^2 - b$ est un carré dans \mathbb{Q} .

solutions

Exercice 4.

$$1) a = bq + r : S = \underbrace{q + q + \dots + q}_{b-r} + \underbrace{(q+1) + \dots + (q+1)}_r = bq + r = a.$$

Exercice 5.

Pour $r < 0$, on a $|r - \sqrt{a}| \geq q^{-2}$.

Pour $r \geq 0$, on pose $a = m/n : |r^2 - a| = |p^2/q^2 - m/n| \geq 1/nq^2$.

Donc $|r - \sqrt{a}| \geq 1/(nq^2|r + \sqrt{a}|) \geq 1/(n\sqrt{a}q^2)$.

Exercice 6.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow b + 4xy - 4\sqrt{bxy} = (x + y - a)^2.$$

$$\Rightarrow : bxy = r^2 \Rightarrow \sqrt{b}(1 - 2r/b) = x + y - a \Rightarrow r = \frac{1}{2}b \text{ et } x + y = a \Rightarrow (x - y)^2 = a^2 - b.$$

$$\Leftarrow : a^2 - b = u^2. \text{ On prend } x = \frac{1}{2}(a + u) \text{ et } y = \frac{1}{2}(a - u) \Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}.$$