Permutations

Exercice 1. *Générateurs de $\mathcal{S}_n$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les sous-ensembles suivants :

1) $A = \{(i, i+1) \text{ tq } 1 \leqslant i < n\}$.

2) $B = \{(1, i) \text{ tq } 2 \leqslant i \leqslant n\}$.

3) $C = \{(1, 2), (1, 2, \ldots, n)\}$.

Exercice 2. *Générateurs de $\mathcal{S}_n$*

Montrer que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ s'écrit de manière unique : $\sigma = c_2^{\alpha_2} \circ c_3^{\alpha_3} \circ \ldots \circ c_n^{\alpha_n}$ où $c_i = (1, 2, \ldots, i)$ et $0 \leqslant \alpha_i < i$.

Exercice 3. *$\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles*

1) Calculer $(a, b, c) \circ (b, c, d)$.

2) Montrer que le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles pour $n \geqslant 3$.

Exercice 4. *$\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

1) Soit $i, j \in [\![3, n]\!]$, $i \neq j$.
Décomposer en cycles à supports disjoints la permutation : $\sigma = (1, i, 2) \circ (1, 2, j) \circ (1, i, 2)$.

2) On note $\mathcal{H}$ le sous-groupe de $\mathcal{A}_n$ engendré par les 3-cycles $(1, 2, k)$, pour $3 \leqslant k \leqslant n$.

a) Montrer : $\forall\, i, j \geqslant 3$ avec $i \neq j$, $\mathcal{H}$ contient $(1, 2) \circ (i, j)$ et $(i, j) \circ (1, 2)$.

b) Montrer : $\forall\, j \geqslant 3$, $\mathcal{H}$ contient $(1, 2) \circ (1, j)$ et $(1, 2) \circ (2, j)$.

c) Montrer : $\forall\, i \neq j$, $\forall\, k \neq \ell$, $(i, j) \circ (k, \ell) \in \mathcal{H}$.

d) Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{A}_n$.

Exercice 5. *Signature en fonction du nombre d'orbites*

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On note c le nombre de cycles à supports disjoints constituant σ et f le nombre de points fixes. Calculer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, c, et f.

Exercice 6. *Nombre de transpositions pour engendrer un cycle*

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle *orbite de* σ toute partie X de $[\![1, n]\!]$ sur laquelle σ induit une permutation circulaire (les orbites sont les supports des cycles de σ, et les singletons constitués de points fixes). On note $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

1) Montrer que si τ est une transposition, alors $N(\tau \circ \sigma) = N(\sigma) \pm 1$.

2) Application : quel est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour obtenir un n-cycle ?

Exercice 7. *Calcul de signature*

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$. Calculer $\varepsilon(\sigma)$.

Exercice 8. *Conjugaison*

Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. On dit que σ et σ' sont conjuguées s'il existe $\rho \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma' = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$.

1) Montrer que tout conjugué d'un k-cycle est encore un k-cycle.

2) Montrer que σ et σ' sont conjuguées si et seulement si les cycles à supports disjoints de σ et σ' ont deux à deux mêmes longueurs.

Exercice 9. *Caractérisation de la signature*

Soit E un ensemble fini et $f : \mathcal{S}_E \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes.

1) Si σ est une transposition, que peut-on dire de $f(\sigma)$?

2) Montrer que deux permutations conjuguées ont même image par f.

3) En déduire que f est la fonction constante 1, ou bien f est la signature.

Exercice 10. *Centre de $\mathcal{S}_E$*

Soit E un ensemble ayant au moins trois éléments.

1) Pour $a, b \in E$ distincts et $\sigma \in \mathcal{S}_E$, simplifier $\sigma \circ (a, b) \circ \sigma^{-1}$.

2) Quelles sont les permutations σ qui commutent avec (a, b) ?

3) En déduire que le centre de $\mathcal{S}_E$ est réduit à $\{\mathrm{id}_E\}$.

Exercice 11. *Commutant d'un n-cycle*

Soit $\sigma = (1, 2, \ldots, n) \in \mathcal{S}_n$. Trouver toutes les permutations $\rho \in \mathcal{S}_n$ commutant avec σ (on cherchera à reconnaître $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$).

Exercice 12. *Commutant d'un produit de 5-cycles*

Dans $\mathcal{S}_{10}$, quelles sont les permutations qui commutent avec $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5) \circ (6, 7, 8, 9, 10)$?

Exercice 13. *Sous-groupe d'indice 2 dans $\mathcal{S}_n$*

Soit H un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ d'ordre $\frac{1}{2}n!$. On note $K = \mathcal{S}_n \setminus H$.

1) Pour $\sigma \in H$, montrer que $\sigma H = H$ et $\sigma K = K$.

2) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Déterminer les ensembles σH, σK, $H\sigma$, $K\sigma$ suivant que $\sigma \in H$ ou $\sigma \in K$.

3) En déduire que si deux permutations sont conjuguées, alors elles sont toutes deux dans H ou toutes deux dans K.

4) Montrer enfin que $H = \mathcal{A}_n$.

Exercice 14. *Puissances d'un k-cycle*

Soit σ un k-cycle de $\mathcal{S}_n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Si $p \mid k$, montrer que σ^p est le produit de p cycles à supports disjoints de longueur k/p.

2) Montrer que pour $p \wedge k = 1$, σ^p est un k-cycle (utiliser l'égalité de Bézout).

3) Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de σ^p.

Exercice 15. *Ordre maximal*

Trouver l'ordre maximal d'une permutation de $\mathcal{S}_{10}$.

Exercice 16. *Dénombrement*

Combien y a-t-il de permutations de $\mathcal{S}_{26}$ comportant trois points fixes, deux 3-cycles, un 5-cycle, et deux 6-cycles ?

Exercice 17. *$k \mapsto |f(k) - k|$ est injective, Mines MP 2012*

Trouver les n tels qu'il existe une permutation f de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $k \mapsto |f(k) - k|$ soit injective.

solutions

Exercice 3.
1) $(a,b)\circ(c,d)$.

Exercice 4.
1) $(1,2)\circ(i,j)$.

Exercice 5.
$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n+c+f}$.

Exercice 7.
Compter les inversions ou récurrence : $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n(n-1)/2}$.

Exercice 11.
Les puissances de σ.

Exercice 12.
$\tau=(1,2,3,4,5)^x\circ(6,7,8,9,10)^y$, ou $\tau=(1,6)\circ(2,7)\circ(3,8)\circ(4,9)\circ(5,10)\circ(1,2,3,4,5)^x\circ(6,7,8,9,10)^y$. (50 éléments).

Exercice 15.
30.

Exercice 16.
$\binom{26}{3}\times\dfrac{2\binom{23}{3}\times 2\binom{20}{3}}{2!}\times 4!\binom{17}{5}\times\dfrac{5!\binom{12}{6}\times 5!\binom{6}{6}}{2!}=10\,372\,722\,765\,601\,996\,800\,000.$

Exercice 17.
$|f(k)-k|$ doit prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $n-1$, donc $\sum_{k=1}^n|f(k)-k|=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Pour tout k, $|f(k)-k|\equiv f(k)-k\pmod 2$. Or $\sum_{k=1}^n(f(k)-k)=0$ puisque f est une permutation de $\{1,\dots,n\}$. On en déduit que $\dfrac{n(n-1)}{2}$ est pair ou encore 4 divise $n(n-1)$. Un seul des deux entiers est pair. La condition nécessaire est donc 4 divise n ou 4 divise $n-1$.

Ces conditions sont suffisantes comme le montrent les exemples suivants, avec $f(p+1)=p+1$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 2 & & & p & & p+2 & & & 2p-1 & & 2p & \\
\swarrow & \nwarrow & \swarrow & \nwarrow\cdots & \nwarrow & \swarrow & \nwarrow & \swarrow & & \nwarrow\cdots & \nwarrow\ \swarrow & & \nwarrow\ \swarrow & & \nwarrow \\
4p & & 4p-1 & & 3p+1 & & 3p & & & & 2p+3 & & 2p+2 & & 2p+1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 2 & & & p & & p+2 & & & 2p & & 2p+1 \\
\swarrow & \nwarrow & \swarrow & \nwarrow\cdots & \nwarrow & \swarrow & \nwarrow & \swarrow & & \nwarrow\cdots & \nwarrow\ \swarrow & & \nwarrow\ \swarrow & \\
4p+1 & & 4p & & 3p+2 & & 3p+1 & & & & 2p+3 & & 2p+2 &
\end{array}$$