Relations d'ordre

Exercice 1. *Ordre sur les fonctions*

Soit X un ensemble et $E = \mathbb{R}^X$. On ordonne E par : $f \leqslant g \Leftrightarrow \forall\, x \in X,\ f(x) \leqslant g(x)$.

1) Vérifier que c'est une relation d'ordre.

2) L'ordre est-il total ?

3) Comparer les énoncés : «f est majorée», et «$\{f\}$ est majoré».

4) Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille majorée de fonctions de E. Montrer qu'elle admet une borne supérieure.

Exercice 2. *Prolongement d'applications*

Soit E un ensemble et $\mathcal{E} = \{(A, f) \text{ tq } A \subset E,\ A \neq \varnothing, \text{ et } f \in E^A\}$.

On ordonne $\mathcal{E}$ par : $(A, f) \preccurlyeq (B, g) \Leftrightarrow A \subset B$ et $\forall\, x \in A,\ f(x) = g(x)$ *(ordre de prolongement).*

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

2) Soient (A, f) et (B, g) deux éléments de $\mathcal{E}$. Trouver une CNS pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée. Quelle est alors sa borne supérieure ?

3) Même question avec minorée.

Exercice 3. *Ordre lexicographique*

On note $E = [-1, 1]^2$, et on définit sur E la relation : $(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Leftrightarrow ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y'))$ *(ordre lexicographique).*

1) Pour $(a, b) \in E$, représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (a, b).

2) Soit A une partie non vide de E. Montrer que A admet une borne supérieure.

Exercice 4. *Ordre sur* $\mathbb{R}^2$

On définit sur $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leqslant y' - y$.

1) Vérifier que c'est une relation d'ordre.

2) Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple (a, b).

3) L'ordre est-il total ?

4) Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Déterminer $\sup(A)$.

Exercice 5. *Relation d'ordre sur un ensemble quotient*

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E réflexive et transitive. On définit la relation : $x \sim y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Sur $E/\sim$ on pose : $\dot{x} \leqslant \dot{y} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

2) Montrer que cette définition est indépendante des représentants x et y choisis.

3) Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $E/\sim$.

Exercice 6. $\sup \circ \inf$ *et* $\inf \circ \sup$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit les fonctions :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sup\{f(t, y) \text{ tq } y \in \mathbb{R}\}, \end{cases} \qquad h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \inf\{f(x, t) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Montrer que g et h sont bornées, puis comparer $\sup h$ et $\inf g$.

Exercice 7. *borne sup* $\Rightarrow$ *borne inf*

Soit E ordonné tel que toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Exercice 8. *Propriétés de sup et inf*

Un treillis est un ensemble ordonné E dans lequel pour tous $x, y \in E$, $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ existent. Soit E un treillis.

1) Montrer que sup et inf sont des opérations associatives.

2) A quelle condition ont-elles des éléments neutres ?

3) Montrer :

a) $\forall x, y \in E$, $\sup(x, \inf(x, y)) = \inf(x, \sup(x, y)) = x$.

b) $\forall x, y, z \in E$, $x \leqslant z \Rightarrow \sup(x, \inf(y, z)) \leqslant \inf(\sup(x, y), z)$.

c) $\forall x, y, z \in E$, $\inf(x, \sup(y, z)) \geqslant \sup(\inf(x, y), \inf(x, z))$.

Exercice 9. *Parties adjacentes*

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides vérifiant : $\forall a \in A, \forall b \in B$, $a \leqslant b$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A, \exists b \in B$ tq $b - a \leqslant \varepsilon$ (on dit que A et B sont *adjacentes*). Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 10. *Ordre déduit d'une loi idempotente*

Soit $\cdot$ une opération commutative et associative sur E, telle que : $\forall x \in E$, $x \cdot x = x$. On définit la relation $\leqslant$ sur E par : $x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot y = x$.

1) Reconnaître $\leqslant$ quand $\cdot$ est $\cap$ sur $\mathcal{P}(X)$ (resp $\cup$).

2) Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre.

3) Démontrer que : $\forall x, y \in E$, $x \cdot y = \inf(x, y)$.

Exercice 11. *Borne supérieure parmi les intervalles*

Soit E l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris $\varnothing$) ordonné par l'inclusion.

Soient I, J deux intervalles. Qu'est-ce que $\inf(I, J)$? $\sup(I, J)$?

Exercice 12. *Pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$*

Dans cet exercice, on admet que : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq 2$.

1) Soient $A = \{x \in \mathbb{Z}^{+*} \text{ tq } x^2 < 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z}^{+*} \text{ tq } x^2 > 2\}$. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(B)$.

2) Soient $A = \{x \in \mathbb{Q}^{+*} \text{ tq } x^2 < 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q}^{+*} \text{ tq } x^2 > 2\}$. On veut démontrer que A n'admet pas de borne supérieure *dans* $\mathbb{Q}$. Pour cela, on suppose au contraire que $\alpha = \sup(A)$ existe ($\alpha \in \mathbb{Q}$), et on pose $\beta = \dfrac{2}{\alpha}$.

a) Montrer que $\beta = \inf(B)$.

b) Montrer que : $\forall a \in A, \forall b \in B$, on a $a \leqslant b$. Que pouvez-vous en déduire pour α et β ?

c) Obtenir une contradiction en considérant $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

Exercice 13. *Distance entre un point et une partie*

Pour $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée, et $x \in \mathbb{R}$, on note : $d(x, A) = \inf\{|x - a| \text{ tq } a \in A\}$ *(distance de x à A)*. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$.

Exercice 14. *Point fixe d'une fonction croissante*

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. On note $A = \{x \in [0, 1] \text{ tq } f(x) \leqslant x\}$.

1) Démontrer que A n'est pas vide.

2) Démontrer que $f(A) \subset A$.

3) Soit $a = \inf(A)$. Montrer que $f(a)$ minore A.

4) En déduire que $f(a) = a$.

Ceci prouve que toute application croissante de $[0, 1]$ dans lui-même admet un point fixe. Montrer que c'est faux pour l'intervalle $[0, 1[$.

solutions

Exercice 4.

4) Si (a,b) majore A, alors $(a,b) \succcurlyeq (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ donc $(a,b) \succcurlyeq (0, \sqrt{2})$.
Réciproquement, si $x^2+y^2 \leqslant 1$, alors $(x+y)^2+(x-y)^2 \leqslant 2$, donc $y \pm x \leqslant \sqrt{2}$, et $(x,y) \preccurlyeq (0,\sqrt{2})$.
Finalement, $\sup(A) = (0,\sqrt{2})$.

Exercice 7.

Soit A non vide et minorée, et $B = \{\text{minorants de } A\}$. B n'est pas vide et est majorée par A donc $\beta = \sup(B)$ existe. Soit $a \in A$: $\forall\, b \in B$, $b \leqslant a$ donc $\beta \leqslant a$. Par conséquent β minore A, donc $\beta = \max(B)$.