Propriétés de $\mathbb{N}$

Exercice 1. *Dénombrement de $\mathbb{N}^2$*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+p \end{cases}$

1) Montrer pour $q > 0$: $f(p+1, q-1) = f(p,q)+1$ et $f(0,p+1) = f(p,0)+1$.

2) Montrer que : $f(0,p+q) \leqslant f(p,q) < f(0,p+q+1)$.

3) Montrer que $g : n \mapsto f(0,n)$ est strictement croissante.

4) Montrer que f est injective (on supposera $f(p,q) = f(p',q')$ et on montrera dans un premier temps que $p+q = p'+q'$).

5) Montrer que f est surjective.

Exercice 2. *Parties dénombrables*

Soit (n_k) une suite d'entiers naturels. On dit que la suite est presque nulle s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, k \geqslant p$, $n_k = 0$, et qu'elle est stationnaire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, k \geqslant p$, $n_k = n_p$.

Montrer que les ensembles des suites presque nulles et des suites stationnaires sont dénombrables.

Exercice 3. *Propriétés du pgcd et du ppcm*

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On pose $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$.

1) Soit x un multiple commun à a et b. En écrivant la division euclidienne de x par m, montrer que $m \mid x$.

2) Soit x un diviseur commun à a et b. Montrer que $x \vee d$ est aussi un diviseur commun à a et b. En déduire $x \mid d$.

3) Comment qualifier m et d pour la relation d'ordre de divisibilité ?

Exercice 4. *Bases de numération*

Soit $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $n \in [\![0, b^p - 1]\!]$, il existe un unique p-uplet $(n_0, \dots, n_{p-1})$ d'entiers naturels tel que : $\forall\, k < p$, $n_k \in [\![0, b-1]\!]$, et $n = \sum_{k=0}^{p-1} n_k b^k$.

Exercice 5. *Bases de numération*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $n_0, n_1, \dots, n_p \in \{1,2\}$ uniques tels que $n = \sum_{k=0}^{p} n_k 2^k$.

Exercice 6. *Bases de numération*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p!$. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(n_1, \dots, n_p)$ d'entiers naturels tel que $\forall\, k \leqslant p$, $n_k \leqslant k$, et $n = \sum_{k=1}^{p} n_k k!$.

Exercice 7. *Récurrence d'ordre 2*

On note $a_n = 25^n + 2^{3n+4}$.

1) Trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a.a_{n+1} + b.a_n$.

2) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a_n est divisible par 17.

Exercice 8. *Ordre sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*

Soit $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour $f, g \in E$ avec $f \neq g$, on note $n_{f,g} = \min\{k \text{ tq } f(k) \neq g(k)\}$.

On ordonne E par :

$$\forall\, f, g \in E,\ f \preccurlyeq g \Leftrightarrow (f = g) \text{ ou } (f(n_{f,g}) < g(n_{f,g})).$$

1) Montrer que c'est une relation d'ordre total.

2) Montrer que toute partie de E non vide admet une borne inférieure et toute partie de E non vide et majorée admet une borne supérieure.

Exercice 9. $f \circ f(n) = n + k$

On veut montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) = n + 1987$ (*Olympiades 1987*).

Soit f une telle application. On pose : $E = [\![0, 1986]\!]$, $F = \mathbb{N} \setminus E$, $G = f(\mathbb{N}) \cap E$, $H = E \setminus G$.

Démontrer successivement :

1) f est injective,

2) $f(F) \subset F$,

3) $f^{-1}(F) = F \cup G$,

4) $f^{-1}(G) = H$,

puis obtenir une contradiction.

Exercice 10. $f(f(n)) < f(n+1)$

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) < f(n+1)$. On veut montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ *(Olympiades 1977)*.

1) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant n,\ f(x) \geqslant n$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \geqslant n$ tel que $f(a) = \min\{f(x) \text{ tq } x \geqslant n\}$. Montrer que $a = n$.

3) En déduire que f est croissante, puis conclure.

solutions

Exercice 7.

1) $a = 33$, $b = -200$.

Exercice 10.

1) récurrence sur n.

2) Si $a > n$, alors $a = b + 1$ avec $b \geqslant n$, donc $f(b) \geqslant n$, donc $f(f(b)) \geqslant f(a)$; contradiction.