Groupes

Exercice 1. *Groupe produit*

Soient G, H deux groupes multiplicatifs. On munit $G \times H$ de l'opération :

$$\forall\, g, g' \in G,\ \forall\, h, h' \in H,\ (g,h)\cdot(g',h') = (gg', hh').$$

Montrer que $\cdot$ définit une loi de groupe sur $G \times H$.

Exercice 2. *Essai de tables*

Les opérations suivantes sont-elles des lois de groupe ?

1)

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

2)

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

3)

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Exercice 3. *Loi Δ*

Soit E un ensemble et $G = \mathcal{P}(E)$.

1) Montrer que (G, Δ) est un groupe commutatif.

2) Pour $a \in E$, on note φ_a : $\begin{cases} G & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ X & \longmapsto & \dot{0} \text{ si } a \notin X \\ X & \longmapsto & \dot{1} \text{ si } a \in X. \end{cases}$

Montrer que φ_a est un morphisme de groupes.

3) On prend $E = [\![1, n]\!]$ et on note φ : $\begin{cases} G & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ X & \longmapsto & (\varphi_1(X), \dots, \varphi_n(X)). \end{cases}$ Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4. *Images directes et réciproques*

Soit G un groupe additif et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1) Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a : $f^{-1}(f(H)) = H + \operatorname{Ker} f$.

2) Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a : $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 5. *Thm du rang*

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes où G est un groupe fini.

Montrer que $\operatorname{card}(\operatorname{Ker} f) \times \operatorname{card}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{card}(G)$.

Exercice 6. *Loi associative régulière*

Soit E un ensemble fini muni d'une opération interne $*$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que E est un groupe.

Exercice 7. *partie finie stable par produit*

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 8. *Translations surjectives*

Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists\, x, y \in G \text{ tq } a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 9. *Ordre d'un élément*

1) Soient G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.

2) Soient $a, b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1}.

3) Soient $a, b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba.

Exercice 10. *Ordre de ab*

Soient a, b deux éléments d'un groupe multiplicatif G tels que : a est d'ordre α, b est d'ordre β, $\alpha \wedge \beta = 1$, $ab = ba$. Déterminer l'ordre de ab.

Exercice 11. *Décomposition d'un élément d'ordre fini*

Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$ d'ordre np avec $n \wedge p = 1$. Montrer qu'il existe $b, c \in G$ uniques tels que b est d'ordre n, c est d'ordre p, $a = bc = cb$.

Exercice 12. *Groupe sans sous-groupe non trivial*

Soit G un groupe ayant au moins deux éléments et n'ayant pas de sous-groupe non trivial. Montrer que G est monogène, fini, et que $\operatorname{card} G$ est un nombre premier.

Exercice 13. *Transport de structure*

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble, et $\varphi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $*$ sur E par :

$$\forall\, x, y \in E,\ x * y = \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)).$$

Montrer que $*$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes.

Exercice 14. *Transport de structure*

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

1) Vérifier que $\sqrt{1+(x*y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$.

2) Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

3) Montrer que l'application sh est un isomorphisme entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}, *)$.

Exercice 15. *Transport de structure*

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 16. *Centre d'un groupe et commutant*

Soit G un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G \text{ tq } \forall\, b \in G, \text{ on a } ab = ba\}$ (*centre de G*), et pour $a \in G$: $C(a) = \{b \in G \text{ tq } ab = ba\}$ (*commutant de a*).

Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de G.

Exercice 17. *Sous-groupes emboîtés*

Soit G un groupe additif, et H, K, L trois sous-groupes de G vérifiant : $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$, $H + L = K + L$. Démontrer que $H = K$.

Exercice 18. card(HK)

Soit G un groupe fini et H, K deux sous-groupes de G. On considère l'application $\varphi : \begin{cases} H \times K & \longrightarrow & G \\ (h,k) & \longmapsto & hk. \end{cases}$

1) Est-ce que φ est un morphisme de groupes ?

2) Soit $z \in HK$, $z = h_0k_0$ avec $h_0 \in H$ et $k_0 \in K$. Montrer que les antécédents de z par φ sont les couples $(h_0t, t^{-1}k_0)$ avec $t \in H \cap K$.

3) En déduire : $\operatorname{card}(HK)\operatorname{card}(H \cap K) = \operatorname{card}(H)\operatorname{card}(K)$.

4) Montrer : (HK est un sous-groupe de G) $\Leftrightarrow$ ($HK \subset KH$) $\Leftrightarrow$ ($HK = KH$).

Exercice 19. *Groupe des automorphismes*

Soit G un groupe multiplicatif. On note $\operatorname{Aut}(G)$ l'ensemble des isomorphismes $\varphi : G \to G$.

1) Montrer que $\operatorname{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

2) Déterminer $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z})$.

3) Pour $a \in G$ on note φ_a : $\begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1}. \end{cases}$ Montrer que $\varphi_a \in \operatorname{Aut}(G)$, et que l'application $a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme de groupes.

Exercice 20. *Sous-groupes d'un groupe cyclique*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $d = k \wedge n$.

1) Déterminer l'ordre de $\dot{k}$ dans G.

2) Montrer que $\dot{k}$ et $\dot{d}$ engendrent le même sous-groupe de G.

3) Quels sont tous les sous-groupes de G ?

Exercice 21. *Morphismes entre deux groupes cycliques*
Soit G un groupe cyclique engendré par a d'ordre n, G' un deuxième groupe, et $a' \in G'$.
Montrer qu'il existe un morphisme $\varphi : G \to G'$ tel que $\varphi(a) = a'$ si et seulement si a' est d'ordre fini divisant n.
Application : déterminer tous les morphismes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 22. *Morphismes de $\mathbb{Q}$ additif*
Déterminer tous les morphismes de ...
1) $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q},+)$.
2) $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$.
3) $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}^*,\times)$.

Exercice 23. *Sous groupes finis de $\mathbb{C}^*$*
Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Exercice 24. *Groupe diédral*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et :

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega^k z \end{cases} \qquad g_k : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega^k \overline{z} \end{cases} \qquad (0 \leqslant k < n)$$

1) Montrer que $G = \{f_0, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{n-1}\}$ est un groupe pour la composition des applications.
2) Soit $a > 0$ et A_k le point du plan d'affixe $a\omega^k$. Montrer que G représente le groupe des isométries du polygone $A_0 \dots A_{n-1}$.
3) G est-il cyclique ?
4) Montrer que G est engendré par les applications f_1 et g_0 et que l'on a : $f_1 \circ g_0 = g_0 \circ f_1^{-1}$.
5) Soit H un groupe quelconque engendré par deux éléments ρ et σ tels que ρ est d'ordre n, σ est d'ordre 2, $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$. Montrer que G et H sont isomorphes.

Exercice 25. *Groupe d'ordre pair*
Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.

Exercice 26. *Groupe d'ordre impair*
Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que : $\forall\, x \in G$, $\exists!\, y \in G$ tq $x = y^2$.

Exercice 27. *Groupe d'exposant 2*
Soit G un groupe fini tel que : $\forall\, x \in G$, $x^2 = e$.
1) Montrer que G est commutatif (considérer $(xy)(xy)$).
2) Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Montrer que $\operatorname{card} K = 2 \operatorname{card} H$.
3) En déduire que $\operatorname{card} G$ est une puissance de 2.

Exercice 28. *Groupes d'ordre 6*
Déterminer tous les groupes finis de cardinal 6 (on admettra que dans un tel groupe, il existe un élément a d'ordre 2, et un élément b d'ordre 3).

Exercice 29. *Groupe d'homographies*
Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, et $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}, \end{cases}$ $\qquad g : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 1-x. \end{cases}$
Vérifier que f et g sont des bijections et déterminer le groupe engendré par f et g pour la loi $\circ$ (il contient exactement six éléments).

Exercice 30. *Groupes de similitudes*
Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on note $f_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \alpha z + \beta \end{cases}$
1) Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{\alpha,\beta}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est-il commutatif ?
2) A quelle condition sur α, β, $f_{\alpha,\beta}$ est-elle d'ordre fini ?

Exercice 31. *Thm de Lagrange*
Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit une relation sur G par :

$$\forall\, x, y \in G,\ \ x \sim y \Leftrightarrow \exists\, h \in H \text{ tq } x = hy.$$

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe de e ?
2) Soit $a \in G$. Montrer que $\dot{a}$ est équipotent à H.
3) En déduire que $\operatorname{card} H$ divise $\operatorname{card} G$ (*Théorème de Lagrange*).

Exercice 32. *Relation d'équivalence avec deux sous-groupes*
Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe G. Pour $x, y \in G$, on pose : $x \sim y \Leftrightarrow \exists\, h \in H,\ \exists\, k \in K$ tq $y = hxk$.
1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2) Pour $x \in G$, soit $G_x = \{(h, k) \in H \times K \text{ tq } hxk^{-1} = x\}$. Montrer que G_x est un sous-groupe de $H \times K$.
3) Si H et K sont finis, montrer que chaque classe d'équivalence est finie de cardinal divisant $\operatorname{card}(H)\operatorname{card}(K)$.

Exercice 33. *Groupe d'ordre ab avec $a \wedge b = 1$*
Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$.
On pose $A = \{x \in G \text{ tq } x^a = e\}$ et $B = \{x \in G \text{ tq } x^b = e\}$.
1) Montrer que A et B sont des sous-groupes de G.
2) Montrer que $A \cap B = \{e\}$ et $AB = G$.

Exercice 34. *Sous-groupes de type fini de $\mathbb{Q}$*
1) Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ engendré par un nombre fini d'éléments. Montrer que H est monogène.
2) Trouver un sous-groupe non trivial de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas engendré par une famille finie.

Exercice 35. $(\mathbb{Q}, +)$ *et* $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$ *ne sont pas isomorphes*
Montrer que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 36. *Sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$*
Soit p un entier naturel premier. On note G l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^{p^n} = 1$.
1) Montrer que G est un groupe multiplicatif infini où tout élément est d'ordre fini.
2) Montrer que tout sous-groupe H de G, distinct de G, est cyclique (on pourra considérer un élément z_0 de $G \setminus H$ et montrer que l'ordre des éléments de H n'excède pas celui de z_0).

Exercice 37. *Centre d'un p-groupe*
Soit G un groupe fini de cardinal p^k où p est un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. On note Z le centre de G.
1) En considérant l'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs montrer que $\operatorname{card}(Z) \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)$.
2) En déduire que tout groupe d'ordre p^2, p premier, est commutatif et est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ soit à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

Exercice 38. *Sous groupes et générateurs de $\mathbb{Z}^2$*
On considère le groupe $G = \mathbb{Z}^2$. Une *base* de G est une famille $(\alpha = (a, a'), \beta = (b, b'))$ engendrant G.
1) **a)** Montrer que (α, β) est une base de G si et seulement si $\det(\alpha, \beta) = \pm 1$.
b) Montrer que $\alpha = (a, a')$ appartient à une base de G si et seulement si $a \wedge a' = 1$.
2) Soit H un sous-groupe non trivial de G. On note $H' = \{ux + vy \text{ tq } u \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{Z}, (x, y) \in H\}$, n le plus petit élément de H' strictement positif et $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$, $(x, y) \in H$ tels que $ux + vy = n$.
a) Montrer que $u \wedge v = 1$ et que x et y sont divisibles par n.
b) On pose $\alpha = (x/n, y/n)$ et $\beta = (-v, u)$. Montrer que (α, β) est une base de G et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(n\alpha, np\beta)$ engendre H.

Exercice 39. *Partie génératrice d'un groupe fini*
Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer qu'il existe une partie génératrice de G de cardinal inférieur ou égal à $\log_2(n)$.

Exercice 40. *Groupe fini ?*
Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Exercice 41. *Itérations, Centrale 2014*
Soit S une partie non vide d'un groupe G fini de cardinal n. Pour $k \geqslant 1$ on note $A(k) = \{s_1 \dots s_k \text{ tq } \forall\, i,\ s_i \in S\}$.
1) Montrer que la suite $(\operatorname{card}(A(k)))$ est croissante et est stationnaire à partir d'un rang $p \leqslant n$.
2) Montrer que $A(n)$ est un groupe et donner un exemple où $A(k)$ n'en n'est pas un si $k < n$.

solutions

Exercice 2.

1) non, a n'est pas régulier. **2)** oui, $G \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. **3)** non, il n'y a pas d'élément neutre.

Exercice 22.

1) $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{Q}$.

2) $x \mapsto 0$.

3) $x \mapsto 1$.

Exercice 33.

2) Soit $x \in G$ et $u, v \in \mathbb{Z}$ tq $ua + vb = 1$. Alors $x = (x^{ua})(x^{vb})$.

Exercice 39.

Soir $\{e_1, \dots, e_p\}$ une partie génératrice de cardinal minimal. Alors les 2^p éléments $e_1^{\alpha_1} \dots e_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$ sont distincts (sinon un des e_i appartient au groupe engendré par les autres) donc $n \geqslant 2^p$.

Exercice 40.

Si $a \in G$ est d'ordre infini alors il engendre un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, qui a une infinité de sous-groupes ; c'est exclus. Donc tous les sous-groupes monogènes de G sont finis, et G est la réunion de ces sous-groupes.

Exercice 41.

1) $A(k) = \bigcup_{s \in S} A(k-1)s$ et $\mathrm{card}(A(k-1)s) = \mathrm{card}(A(k-1))$ par régularité de s. Ceci prouve la croissance de la suite $(\mathrm{card}(A(k)))$. Comme elle est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, il existe $p \leqslant n$ tel que $\mathrm{card}(A(p)) = \mathrm{card}(A(p+1))$. Alors tous les ensembles $A(p)s$, $s \in S$, sont égaux à $A(p+1)$ puis $A(p+2) = \bigcup_{t \in S} tA(p+1) = \bigcup_{t \in S} tA(p)s = A(p+1)s$ où s est un élément fixé dans S. Ainsi $\mathrm{card}(A(p+2)) = \mathrm{card}(A(p+1))$ donc la suite $(\mathrm{card}(A(k))_{k \geqslant p}$ est constante.

2) Avec le théorème de Lagrange, $s^n = e$ pour tout $s \in S$ donc la suite $(A(k))_{k \geqslant n}$ est croissante et la suite des cardinaux étant constante, on a $A(k) = A(n)$ pour tout $k \geqslant n$ ce qui prouve la stabilité de $A(n)$ par produit et donc aussi par inversion puisque $s^{-1} = s^{n-1}$.

Cas où on ne stationne qu'à partir du rang n : $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $S = \{1\}$.