Ensembles finis

Exercice 1. *Permutations de* $[\![1,12]\!]$

Combien y a-t-il de bijections f de $[\![1,12]\!]$ dans lui même possédant :

1) la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?

2) la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?

3) ces deux propriétés à la fois ?

4) Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application.*

Exercice 2. *Permutations de couples*

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions ...

1) au total ?

2) en respectant l'alternance des sexes ?

3) sans séparer les couples ?

4) en remplissant les deux conditions précédentes ?

Exercice 3. *Nombre d'opérations*

1) Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?

2) Combien sont commutatives ?

3) Combien ont un élément neutre ?

4) Combien sont commutatives et ont un élément neutre ?

Exercice 4. *Formule du crible*

Soient $A_1,\dots,A_n$, n ensembles finis.

1) a) Calculer $\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup A_3)$ et $\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$.

b) Suggérer une formule pour $\operatorname{card}(A_1\cup\ldots\cup A_n)$.

2) Démonstration de la formule : On note $E=\bigcup_{i=1}^n A_i$, et pour $x\in E$ on pose $f_i(x)=1$ si $x\in A_i$, $f_i(x)=0$ sinon.

a) Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Développer complètement $p=(1-x_1)\times\ldots\times(1-x_n)$.

b) En considérant la somme $\sum_{x\in E}(1-f_1(x))\ldots(1-f_n(x))$, démontrer la formule **1b)**.

3) Applications :

a) Déterminer le nombre d'applications $f:[\![1,p]\!]\to[\![1,n]\!]$ non surjectives.

b) Déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ayant au moins un point fixe.

Exercice 5. *Inégalités pour la formule du crible*

Soient $A_1,\dots,A_n$, n ensembles finis, et $E=\bigcup_{i=1}^n A_i$.

1) Montrer que $\operatorname{card}(E)\leqslant\sum_{i=1}^n\operatorname{card}(A_i)$. Cas d'égalité ?

2) Montrer que $\operatorname{card}(E)\geqslant\sum_{i=1}^n\operatorname{card}(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{card}(A_i\cap A_j)$. Cas d'égalité ?

Exercice 6. *Couples* (A,B) *tels que* $A\cup B=E$

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $\mathcal{E}=\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2 \text{ tq } A\cup B=E\}$. Chercher $\operatorname{card}(\mathcal{E})$.

Exercice 7. *Parties ne contenant pas d'éléments consécutifs*

1) Combien y a-t-il de parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas d'éléments consécutifs ?

Indication : Si $\{x_1,\dots,x_p\}$ est une telle partie avec $x_1<x_2<\ldots<x_p$, considérer l'ensemble $\{x_1-1,\dots,x_p-p\}$.

2) Soit t_n le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal quelconque sans éléments consécutifs.

a) Montrer que $t_{n+2}=t_{n+1}+t_n$, $t_{2n+1}=t_n^2+t_{n-1}^2$, et $t_{2n}=t_n^2-t_{n-2}^2$.

b) Calculer t_{50}.

Exercice 8. *Nombre de relations d'équivalence*

Soit R_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.

1) Trouver une relation de récurrence entre R_n et les R_k, $k < n$ (fixer un élément, et raisonner sur la classe d'équivalence de cet élément).

2) Calculer R_n pour $n \leqslant 6$.

Exercice 9. *Equivalence entre fonctions*

Soient E, F, deux ensembles non vides. On définit deux relations sur $X = F^E$ par :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists\, \varphi : F \to F \text{ bijective tq } g = \varphi \circ f \ ;$$
$$f \equiv g \Leftrightarrow (\forall\, x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Leftrightarrow g(x) = g(y)).$$

1) Montrer que ce sont des relations d'équivalence.

2) Montrer que $f \sim g \Rightarrow f \equiv g$.

3) On suppose $f \equiv g$. Montrer que $f \sim g$ dans les cas suivants :

a) F est fini et f est surjective.

b) F est fini et f est quelconque.

c) E est fini.

4) Chercher un contrexemple pour $E = F = \mathbb{N}$.

Exercice 10. *Très bon ordre*

Soit E un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est totalement ordonné et fini.

Exercice 11. *Élément maximal*

Soit E un ensemble ordonné. Un élément $a \in E$ est dit *maximal* s'il n'existe pas de $b \in E$ tq $b > a$.

1) Si E est totalement ordonné, montrer que : *maximal* $\Leftrightarrow$ *maximum.*

2) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordonné par la divisibilité. Chercher les éléments maximaux.

3) Si E est fini, montrer qu'il existe un élément maximal.

4) Si E est fini et n'a qu'un seul élément maximal, montrer que cet élément est maximum.

Exercice 12. *Nombres de Catalan*

Soient $x_1, \ldots, x_n$, n réels. Pour calculer la somme $x_1 + \ldots + x_n$, on place des parenthèses de façon à n'avoir que des additions de deux nombres à effectuer. Soit t_n le nombre minimal de manières de placer les parenthèses (on pose $t_1 = 1$).

1) Déterminer t_2, t_3, t_4.

2) Trouver une relation de récurrence entre t_n et $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

solutions

Exercice 1.

1) $(6!)^2$, $6^6 \times 12^6$.
2) $4! \times 8!$, $4^4 \times 12^8$.
3) $2!2!4!4!$, $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Exercice 2.

1) $(2n)!$.
2) $2(n!)^2$.
3) $2^{n+1} \times n!$.
4) $4 \times n!$.

Exercice 3.

1) n^{n^2}.
2) $n^{n(n+1)/2}$.
3) $n \times n^{(n-1)^2}$.
4) $n \times n^{n(n-1)/2}$.

Exercice 4.

3) a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p$.
b) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k n!}{k!}$.

Exercice 5.

2) Récurrence. Égalité pour $n \leqslant 2$ ou les A_i 3 à 3 disjoints.

Exercice 6.

3^n.

Exercice 7.

1) $\{x_1 - 1, \ldots, x_p - p\}$ est une partie quelconque de $\{0, \ldots, n-p\}$, donc $N = \binom{n-p+1}{p}$.
2) b) 32951280099.

Exercice 8.

1) $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} R_k$ avec $R_0 = 1$.
2) 1,1,2,5,15,52,203.

Exercice 12.

1) 1,2,5.
2) $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{n-k}$.