Relations d'équivalence

Exercice 1. *Congruence des carrés modulo 5*

On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x \sim y \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \pmod 5$.

1) Déterminer l'ensemble quotient.

2) Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?

Exercice 2. *Produit cartésien*

Soient deux relations d'équivalence : $\mathcal{R}$ sur E, et $\mathcal{S}$ sur F.

On définit sur $E \times F$: $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{S}y'$.

1) Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $\varphi : \begin{cases} E \times F & \longrightarrow & (E/\mathcal{R}) \times (F/\mathcal{S}) \\ (x,y) & \longmapsto & (\dot{x},\dot{y}) \end{cases}$

Démontrer que φ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice 3. $X \cup A = Y \cup A$

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit la relation sur $\mathcal{P}(E)$: $X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$.

1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.

2) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E \setminus A) \\ X & \longmapsto & X \setminus A. \end{cases}$

Montrer que φ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice 4. *Équivalences sur E^E*

Soit E un ensemble non vide. On considère les relations sur $F = E^E$:

$$\begin{aligned} f \sim g &\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^n, \\ f \approx g &\Leftrightarrow \exists\, m,n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^m, \\ f \equiv g &\Leftrightarrow f(E) = g(E). \end{aligned}$$

1) Montrer que $\sim$, $\approx$, $\equiv$ sont des relations d'équivalence.

2) Pour $f \in F$, on note $f^\sim$, $f^\approx$, $f^\equiv$ les classes d'équivalence de f modulo $\sim$, $\approx$, $\equiv$.

a) Comparer $f^\sim$, $f^\approx$.

b) Montrer que toute classe d'équivalence pour $\approx$ est réunion de classes d'équivalence pour $\sim$.

c) Que pouvez-vous dire de f s'il existe $g \in f^\approx$ injective ? surjective ?

d) Même question avec $f^\equiv$.

Exercice 5. *Relation d'équivalence quotient*

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'équivalence sur un ensemble E telles que : $\forall\, x,y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y$.

On définit $\dot{\mathcal{S}}$ sur $E/\mathcal{R}$ par : $\dot{x}\dot{\mathcal{S}}\dot{y} \Leftrightarrow x\mathcal{S}y$.

Vérifier que $\dot{\mathcal{S}}$ est une relation d'équivalence, puis définir une bijection entre $(E/\mathcal{R})/\dot{\mathcal{S}}$ et $E/\mathcal{S}$.

Exercice 6. *Complétion d'une relation réflexive et transitive*

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E réflexive et transitive. On définit les deux relations :

$$\begin{aligned} x\mathcal{S}y &\Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x), \\ x\mathcal{T}y &\Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x). \end{aligned}$$

Est-ce que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence ?

Exercice 7. *Parties saturées pour une relation d'équivalence*

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit $s(A) = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$.

1) Comparer A et $s(A)$.

2) Simplifier $s(s(A))$.

3) Montrer pour $x \in E$: $(x \in s(A)) \Leftrightarrow (\dot{x} \cap s(A) \neq \varnothing)$. En déduire $s(E \setminus s(A))$.

4) Démontrer que $s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i)$ et $s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} s(A_i)$.

5) Donner un exemple d'inclusion stricte.