Applications

Exercice 1. *Images directes et réciproques*

Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1) Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.

2) Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

3) Comparer $f(A \mathbin{\Delta} A')$ et $f(A) \mathbin{\Delta} f(A')$.

4) Comparer $f^{-1}(B \mathbin{\Delta} B')$ et $f^{-1}(B) \mathbin{\Delta} f^{-1}(B')$.

5) A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\, A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

Exercice 2. $(X \cap A, X \cap B)$

Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$

1) Qu'est-ce que $\varphi(\varnothing)$? $\varphi(E \setminus (A \cup B))$?

2) A quelle condition sur A et B, φ est-elle injective ?

3) Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par φ ?

4) A quelle condition sur A et B, φ est-elle surjective ?

Exercice 3. *Partie stable par une application*

Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$. Soit $A \subset E$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.

1) Montrer que $f(B) \subset B$.

2) Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

Exercice 4. *Factorisation d'une application*

1) Soient $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$. A quelle condition h est-elle unique ?

2) Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall\, x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$. A quelle condition h est-elle unique ?

Exercice 5. *Propriétés des applications $A \mapsto f(A)$ et $B \mapsto f^{-1}(B)$*

Soit $f : E \to F$. On définit $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{cases}$ et $\Psi : \begin{cases} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B). \end{cases}$

Montrer que :

1) f est injective $\Leftrightarrow$ Φ est injective $\Leftrightarrow$ Ψ est surjective.

2) f est surjective $\Leftrightarrow$ Φ est surjective $\Leftrightarrow$ Ψ est injective.

Exercice 6. $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ *et* $\varphi \mapsto \varphi \circ f$

Soit $f : E \to F$ une application, et G un troisième ensemble ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : \begin{cases} E^G & \longrightarrow & F^G \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f^* : \begin{cases} G^F & \longrightarrow & G^E \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{cases}$$

Montrer que :

1) f est injective $\Leftrightarrow$ f_* est injective $\Leftrightarrow$ f^* est surjective.

2) f est surjective $\Leftrightarrow$ f_* est surjective $\Leftrightarrow$ f^* est injective.

Exercice 7. $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ *injectives et* $f \circ h \circ g$ *surjective*

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} E$ trois applications telles que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que f, g, h sont bijectives.

Exercice 8. *Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f*

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathcal{S} = \{X \subset E \text{ tq } f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1) Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.

2) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion.

3) Soient $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.

4) Soient $X, Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $E \setminus X$ et $Y \setminus X$ appartienent à $\mathcal{S}$.

5) Montrer que l'application : $\begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{P}(f(E)) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{cases}$ est une bijection.

Exercice 9. *Conjugaison*

Soit $f : E \to E$ bijective. La conjugaison par f est l'application $\varPhi_f$: $\begin{cases} E^E & \longrightarrow & E^E \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \circ f^{-1}. \end{cases}$

1) Montrer que $\varPhi_f$ est une bijection de E^E.

2) Simplifier $\varPhi_f \circ \varPhi_g$.

3) Simplifier $\varPhi_f(\varphi) \circ \varPhi_f(\psi)$.

4) Soient $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, les sous-ensembles de E^E constitués des injections et des surjections. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ sont invariants par $\varPhi_f$.

5) Lorsque φ est bijective, qu'est-ce que $(\varPhi_f(\varphi))^{-1}$?

Exercice 10. *Ensembles équipotents*

Soient E, F deux ensembles. On dit que :

E est moins puissant que F s'il existe une injection $f : E \to F$;
E est plus puissant que F s'il existe une surjection $f : E \to F$;
E et F sont équipotents s'il existe une bijection $f : E \to F$.

1) Démontrer que : (E est moins puissant que F) $\Leftrightarrow$ (F est plus puissant que E).

2) Montrer que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } n \text{ est divisible par } 3\}$, et $\mathbb{Z}$ sont deux à deux équipotents.

3) Démontrer que E est moins puissant que $\mathcal{P}(E)$.

4) Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ quelconque et $A = \{x \in E \text{ tq } x \notin f(x)\}$. Prouver que $A \notin f(E)$.

5) Est-ce que E et $\mathcal{P}(E)$ peuvent être équipotents ?

6) Soit G un troisième ensemble. Si E est moins puissant que F, démontrer que E^G est moins puissant que F^G.

Exercice 11. *Affirmations*

Soit $f : E \to F$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1) $\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad f(x) = y$.
2) $\forall x \in E \quad \exists y \in F \text{ tq } f(x) = y$.
3) $\exists x \in E \text{ tq } \forall y \in F \quad f(x) = y$.
4) $\exists x \in E \text{ tq } \exists y \in F \text{ tq } f(x) = y$.
5) $\forall y \in F \quad \forall x \in E \quad f(x) = y$.
6) $\forall y \in F \quad \exists x \in E \text{ tq } f(x) = y$.
7) $\exists y \in F \text{ tq } \forall x \in E \quad f(x) = y$.
8) $\exists y \in F \text{ tq } \exists x \in E \text{ tq } f(x) = y$.