Produit scalaire

Exercice 1. *Produits scalaires ?*

Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :

1) $E = \mathbb{R}^2$, $((x,x') \mid (y,y')) = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ (étudier $((1,t) \mid (1,t))$, $t \in \mathbb{R}$).

2) $E = \mathbb{R}^n$, $((x_1,\dots,x_n) \mid (y_1,\dots,y_n)) = a\sum_i x_iy_i + b\sum_{i\neq j} x_iy_j$ (on montrera que $(\sum x_i)^2 \leqslant n\sum x_i^2$).

3) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$.

Exercice 2. *Intégrale double*

Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace E des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ nulles sur le bord, C, de D.

Pour $f,g \in E$, on pose $(f \mid g) = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Montrer que c'est un produit scalaire.

Exercice 3. *Produit scalaire*

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose pour $f,g \in E$: $(f \mid g) = \int_{t=a}^b u(t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1) A quelle condition sur u définit-on ainsi un produit scalaire ?

2) Soient u,v deux fonctions convenables. A quelle condition les normes associées sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. *Produit scalaire ?*

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et (a_n) une suite d'éléments de $[a,b]$.

Pour $f,g \in E$, on pose : $(f \mid g) = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n}f(a_n)g(a_n)$.

1) A quelle condition sur la suite (a_n) définit-on un produit scalaire ?

2) Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux telles suites telles que les ensembles $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.

3) Question ouverte : à quelle condition les normes associées à deux suites (a_n) et (b_n) sont-elles équivalentes ?

4) Montrer qu'il n'existe pas de suite (a_n) pour laquelle E soit complet.

Exercice 5. *Base de Schmidt*

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire : $(P \mid Q) = \int_{t=-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. *Base de Schmidt*

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$. Chercher une base orthonormée de E.

Exercice 7. *Trouvez le produit scalaire*

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels de degrés étagés ($\deg P_n = n$). Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille (P_n) est orthonormée.

Exercice 8. *Somme directe orthogonale*

Soit E un espace préhilbertien et $F_1,\dots,F_n$ des sev tels que pour $i \neq j$, $F_i \perp F_j$. Montrer que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe.

Exercice 9. *Espace ℓ^2*

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u,v \in E$, on pose : $(u \mid v) = \sum_{n=0}^\infty u_nv_n$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $(u \mid v)$ existe.

3) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

4) Montrer que E, muni de la norme associée, est complet.

Exercice 10. $f(x) \perp x \Rightarrow f = 0$

Soit E un espace vectoriel préhilbertien complexe et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout vecteur $x \in E$, on a $f(x) \perp x$.

1) Montrer que pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a $(f(x) \mid y) = 0$.
2) Montrer que $f = 0$.
3) Comparer avec le cas réel.

Exercice 11. *Équation du second degré*

Soient E ev euclidien, $a \in E$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$. Résoudre l'équation $\alpha(x \mid x) + \beta(x \mid a) + \gamma = 0$.

Exercice 12. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E l'ensemble des fonctions : $[a, b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues et $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \quad \int_a^b f \times \int_a^b 1/f. \end{cases}$

Montrer que $\min\{\Phi(f) \text{ tq } f \in E\} = (b-a)^2$ et chercher les fonctions réalisant le minimum.

Exercice 13. *Inversion*

Soit E un ev euclidien. On pose pour $x \neq 0$: $i(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

1) Montrer que i est une involution et conserve les angles non orientés de vecteurs.
2) Vérifier que : $\forall\, x, y \in E \setminus \{0\}$, $\|i(x) - i(y)\| = \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$.
3) Déterminer l'image par i :
  a) d'un hyperplan affine ne passant pas par 0.
  b) d'une sphère passant par 0.
  c) d'une sphère ne passant pas par 0.

Exercice 14. *Inégalité de Ptolémée*

Soit E un espace euclidien.

1) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que : $\forall\, x, y \in E \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$.
2) Soient $a, b, c, d \in E$. Montrer que $\|a-c\|\|b-d\| \leqslant \|a-b\|\|c-d\| + \|b-c\|\|a-d\|$. Indication : se ramener au cas $a = 0$ et utiliser l'application f.

Exercice 15. *Calcul de distance*

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P \mid Q) = \sum_i a_i b_i$. Soit $H = \{P \in E \text{ tq } P(1) = 0\}$.

1) Trouver une base orthonormale de H.
2) Calculer $d(X, H)$.

Exercice 16. *Calcul de minimums*

Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto \quad \int_{x=0}^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2 \, \mathrm{d}x. \end{cases}$

Exercice 17. *Calcul de minimums*

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \int_{t=0}^{1} (1 + tx_1 + \ldots + t^n x_n)^2 \, \mathrm{d}t$. Montrer que φ admet un minimum absolu et le calculer lorsque $n = 3$.
2) Même question avec $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}(1 + tx_1 + \ldots + t^n x_n)^2 \, \mathrm{d}t$.

Exercice 18. *Expression analytique*

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ une base orthonormée de E, et F le sev d'équations dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

1) Trouver une base orthonormée de F.
2) Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.
3) Calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 19. *Projection sur un hyperplan*
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1,\dots,a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 20. *Caractérisation des projections orthogonales*
Soit E un ev euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. Montrer que :

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Leftrightarrow \forall\, x,y \in E,\ (x \mid p(y)) = (p(x) \mid y) \Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Pour la deuxième caractérisation, considérer $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$ et faire un dessin.

Exercice 21. *Composition de projecteurs*
Soient F, G deux sev d'un ev euclidien E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

Exercice 22. *Projecteurs commutant*
Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} p$ et $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} q$ sont orthogonaux.

Exercice 23. *Caractérisation des bases orthonormales*
Soit E un ev euclidien, et $e_1,\dots,e_n$ des vecteurs unitaires tels que : $\forall\, x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i)^2$.
1) Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.
2) On remplace l'hypothèse : e_i unitaire par : $\dim E = n$.
a) Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.
b) Démontrer que : $\forall\, x,y \in E$, $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i)(y \mid e_i)$.
c) On note G la matrice de Gram de $e_1,\dots,e_n$. Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

Exercice 24. *Polytechnique MP* 2000*
Soit E un espace euclidien, $(y_j)_{j\in I}$ une famille de vecteurs de E telle qu'il existe A et B strictement positifs vérifiant :

$$\forall\, x \in E,\ A\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in I} (x \mid y_j)^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

1) Montrer que $(y_j)_{j\in I}$ engendre E.
2) On choisit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que $y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $y_3 = y_2$ conviennent.
3) Si $A = B = 1$ et $\|y_j\| = 1$ pour tout j, montrer que $(y_j)_{j\in I}$ est une base orthonormale.
4) Si $A = B$, montrer que pour tout $x \in E$, $x = \dfrac{1}{A} \sum_{j\in I} (x \mid y_j) y_j$.

Exercice 25. *Déterminant de Gram*
Soit E un espace préhilbertien et $u_1,\dots,u_n \in E$. On note $G = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de Gram de ces vecteurs ($g_{ij} = (u_i \mid u_j)$).
1) On suppose E de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$. Exprimer G en fonction de $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)$.
2) En déduire que $\det(G)$ est un réel positif ou nul, et nul si et seulement si les vecteurs u_i sont liés.
3) Montrer le même résultat sans supposer que E est de dimension finie.
4) Examiner le cas particulier $n = 2$.
5) Application : Le tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

Exercice 26. *Angles $> 2\pi/3$*
Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Montrer qu'il n'existe pas trois vecteurs u_1, u_2, u_3 unitaires faisant entre eux deux à deux des angles strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 27. *Matrice de Gram*

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un ev euclidien E, et $G(x_1, \dots, x_n)$ leur matrice de Gram.

1) Montrer que $\operatorname{rg} G(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

2) Montrer que $\det G(x_1, \dots, x_n)$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.

3) Soit $F = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$. On note $d(x, F) = \min(\|x - y\|, y \in F)$.

Montrer que $d(x, F)^2 = \dfrac{\det G(x_1, \dots, x_n, x)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}$.

Exercice 28. *Congruence des matrices de Gram*

Soit E un ev hermitien et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases quelconques. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

Exercice 29. *Gram$(u(e_i))$*

Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. On note G le déterminant de Gram. Montrer que $G(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (\det u)^2 G(e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 30. *Forme quadratique associée à la matrice de Gram*

Soit E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.

Montrer que : $\forall x \in E$, $\sum_{i,j} a_{ij} (e_i \mid x)(e_j \mid x) = \|x\|^2$.

Exercice 31. *Vecteur défini par ses produits scalaires*

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues.

Existe-t-il $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall i$, $\int_{t=0}^{1} f(t) f_i(t) \, \mathrm{d}t = 1$?

Exercice 32. *Famille duale de $1, X, X^2, \dots$*

1) Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall i, j \leqslant n$, $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t) \, \mathrm{d}t = \delta_{ij}$.

2) Montrer qu'il n'existe pas de suite de polynômes $(P_0, \dots, P_n, \dots)$ telle que :

$\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t) \, \mathrm{d}t = \delta_{ij}$.

Exercice 33. *Décomposition QR*

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.

2) Application : inégalité de Hadamard. Soit E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée, et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs quelconques.

Démontrer que $|\det_{(e_i)}(u_j)| \leqslant \prod_j \|u_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 34. *Coefficients diagonaux dans la méthode de Schmidt*

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathcal{B}$ par la méthode de Schmidt. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Montrer que $P_{ii} \times d(u_i, \operatorname{vect}(u_1, \dots, u_{i-1})) = 1$.

Exercice 35. *Coordonnées des vecteurs de Schmidt*

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathcal{B}$ par la méthode de Schmidt.

On note G_n le déterminant de Gram de $u_1, \dots, u_n$, et $\Delta_{i,n}$ le cofacteur de $(u_i \mid u_n)$ dans G_n.

Montrer que $e_n = \dfrac{1}{\sqrt{G_{n-1} G_n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,n} u_i$.

Exercice 36. $\det({}^t\!AA)$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det({}^t\!AA) \geqslant 0$.

Exercice 37. *Polynômes orthogonaux*

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. On pose $(P\mid Q)=\int_{t=0}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

1) Démontrer que $(\ \mid\ )$ est un produit scalaire sur E.

2) Démontrer qu'il existe une unique famille $(P_0,P_1,\dots,P_n,\dots)$ de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases}\deg P_i = i\\ \text{le coefficient dominant de } P_i \text{ est strictement positif}\\ \text{la famille } (P_i) \text{ est orthonormée.}\end{cases}$$

Exercice 38. *Polynômes orthogonaux*

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $(P\mid Q)=\int_{t=0}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que E, muni de $(\ \mid\ )$, est un espace euclidien.

2) Soit $K=\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ et $P\in K\setminus\{0\}$. Quel est le degré de P ?

3) Soit $\Phi : x\mapsto \int_{t=0}^1 P(t)t^x\,\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est une fonction rationnelle.

4) Trouver Φ à une constante multiplicative près.

5) En déduire les coefficients de P.

6) En déduire une base orthogonale de E.

Exercice 39. *Réduction en carrés d'une forme quadratique*

Soient $f_1,\dots,f_p$, p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\mathrm{rg}(f_1,\dots,f_p)=n$.

En considérant le produit scalaire : $(x\mid y)=\sum_{i=1}^p f_i(x)f_i(y)$, démontrer qu'il existe n formes linéaires $g_1,\dots,g_n$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^p f_i(x)^2=\sum_{i=1}^n g_i(x)^2.$$

exemple : réduire $x^2+(x+y)^2+(x+2y)^2$

Exercice 40. *Famille de vecteurs unitaires équidistants*

Soit E un ev euclidien, et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre. Démontrer qu'il existe une famille $(u_1,\dots,u_n)$ vérifiant :

$$u_i \text{ est unitaire},\quad \|u_i-u_j\|=1,\quad \mathrm{vect}(u_1,\dots,u_i)=\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_i).$$

Démontrer que toute famille $(u_1,\dots,u_n)$ vérifiant les deux premières propriétés est libre.

Exercice 41. *Famille obtusangle*

Soit E un ev euclidien et $u_1,\dots,u_n$ une famille de vecteurs vérifiant : $\forall\, i\neq j,\ (u_i\mid u_j)<0$.

1) On suppose $(u_1,\dots,u_n)$ libre. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la famille de Schmidt associée et M la matrice de passage de $(u_1,\dots,u_n)$ à $(e_1,\dots,e_n)$. Montrer que M est à coefficients positifs.

2) Dans le cas général, démontrer par récurrence sur n que $\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_n)\geqslant n-1$.

3) Si $\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_n)=n-1$, démontrer que toute famille de $n-1$ vecteurs extraite de $(u_1,\dots,u_n)$ est libre, et que les composantes dans cette famille du vecteur retiré sont strictement négatives.

Exercice 42. $F+F^\perp\neq E$

Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(f\mid g)=\int_{t=0}^1 fg(t)\,\mathrm{d}t$, et $F=\{f\in E \text{ tq } f(0)=0\}$.

Montrer que $F^\perp=\{0\}$.

Exercice 43. *Forme linéaire sur* $\mathbb{R}_2[X]$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $(P\mid Q)=\int_{t=0}^1 PQ(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Vérifier que c'est effectivement un produit scalaire.

2) Soit $\varphi : \begin{cases}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & P(0).\end{cases}$ Trouver le polynôme A tel que : $\forall\, P\in\mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P)=(A\mid P)$.

Exercice 44. *Norme uniforme sur $\mathbb{R}_3[X]$*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que $\int_{t=-1}^{1} P^2(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Montrer que $\sup\{|P(x)| \text{ tq } -1 \leqslant x \leqslant 1\} \leqslant 2\sqrt{2}$.

Indication : pour $a \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P(a) = \int_{t=-1}^{1} P(t)P_a(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer explicitement P_a, et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 45. *Hanh-Banach pour une boule*

Soit E un espace préhilbertien réel et B une boule ouverte de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall\, x \in B$, $f(x) > 0$.

Exercice 46. *Orthogonal de $\mathbb{R}[X]$*

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sev des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

1) Montrer que $g \notin F$.

2) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.

3) En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 47. *Orthogonal d'un hyperplan*

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et, pour $f \in E$: $\varphi(f) = \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que φ est continue.

2) Montrer que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.

3) Montrer que $H^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 48. *Centrale MP 2000*

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi(f,g) = \int_{[0,1]} fg + f'g'$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire.

2) Soit $V = \{f \in E \text{ tq } f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \text{ tq } f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.

3) Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E \text{ tq } f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf_{f\in E_{\alpha\beta}} \int_{[0,1]} f^2 + f'^2$.

Exercice 49. $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$.

Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$.

Exercice 50. *X MP* 2000*

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. Trouver toutes les fonctions f de E dans $\mathbb{R}$ continues telles que $u \perp v \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Exercice 51. *Magistère de Ker Lann 2010*

1) Calculer pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\Big(\frac{1}{2^k}\Big)^i\Big(\frac{1}{2^k}\Big)^j$.

2) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} P\Big(\frac{1}{2^k}\Big) Q\Big(\frac{1}{2^k}\Big)$.

3) On note $(P \mid Q)$ cette limite. Justifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4) Soit la forme linéaire Φ : $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto P(0). \end{cases}$

Montrer qu'il n'existe pas de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P) = (P \mid Q)$. Commenter.

Exercice 52. *Familles libres, Mines 2015*

Soit $(E, (\mid))$ un espace préhilbertien. Montrer que $A = \{(x,y) \in E \times E,\ (x,y) \text{ est libre}\}$ est ouvert.

solutions

Exercice 1.

1) $a > 0, b = c, d > 0, ad - bc > 0$.

2) $a - b > 0$ et $a + (n-1)b > 0$.

Exercice 3.

1) $u \geqslant 0$ et $u^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.

2) Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha u \leqslant v \leqslant \beta u$.

Exercice 4.

1) (a_n) est partout dense.

4) Si les a_n sont distincts, on choisit pour tout n une fonction f_n comprise entre 0 et 1 valant alternativement 1 et -1 en $a_0, \dots, a_n$. Alors la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas car si $f_n \to f$ alors $f^2 = 1$, absurde.

Exercice 5.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, X\sqrt{\frac{3}{2}}, (3X^2-1)\sqrt{\frac{5}{8}} + (5X^3 - 3X)\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$.

Exercice 6.

$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{X-2}{\sqrt{10}}, \frac{X^2-4X+2}{\sqrt{14}}$.

Exercice 10.

1) $(f(x) \mid y) = -(f(y) \mid x)$ et $(f(ix) \mid y) = -(f(y) \mid ix)$.

Exercice 11.

sphère de centre $-\dfrac{\beta a}{2\alpha}$, ce point ou $\varnothing$.

Exercice 12.

$f = \text{cste}$.

Exercice 13.

2) Élever au carré.

3) **a)** $(x \mid u) = 1 \Leftrightarrow (i(x) \mid u - i(x)) = 0$: sphère passant par 0.

b) hyperplan ne passant pas par 0.

c) $\|x - a\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \left\|x - \dfrac{a}{\|a\|^2 - R^2}\right\|^2 = \dfrac{R^2}{(\|a\|^2 - R^2)^2}$: sphère ne passant pas par 0.

Exercice 14.

1) Élever au carré.

Exercice 15.

2) $1/\sqrt{n+1}$.

Exercice 16.

$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}$, $b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}$, $m = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$.

Exercice 17.

1) $\frac{1}{16}$.

2) $\frac{1}{4}$.

Exercice 18.

1) $(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -4, 3))$.

2) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $\sqrt{\frac{7}{10}}$.

Exercice 19.
$\dfrac{1}{\sum a_i^2}(I - (a_i a_j))$.

Exercice 22.
Si $p \circ q = q \circ p$: Soient $x \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} p$ et $y \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} q$.
Alors $p \circ q(x) = q(x) \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, donc $(q(x) \mid y) = (x \mid y) = 0$.

Si $A = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} p$ et $B = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} q$ sont orthogonaux : Alors $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A$, $\operatorname{Im} q = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} B$, et $E = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A \overset{\perp}{\oplus} B \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} p^{\perp} \cap \operatorname{Im} q^{\perp})$. Par décomposition, on obtient $p \circ q = q \circ p =$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Exercice 23.
1) $\sum_{i=1}^{n} (e_j \mid e_i)^2 = 1 \Rightarrow$ famille orthonormée et $\operatorname{vect}(e_i)^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 24.
1) Le sev engendré a un orthogonal nul.
2) N'importe quelle famille génératrice convient (équivalence des normes).
3) $1 = \|y_i\|^2 = \|y_i\|^4 + \sum_{j \neq i} (y_i \mid y_j)^2 \Rightarrow \forall\, j \neq i,\ (y_i \mid y_j) = 0$.
4) Par polarisation on a : $\forall\, x, y,\ \sum_{j \in I} (x \mid y_j)(y \mid y_j) = A(x \mid y)$ donc $\sum_{j \in I} (x \mid y_j) y_j - Ax \in E^{\perp}$.

Exercice 25.
5) $\frac{1}{12}$.

Exercice 26.
$\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 < 0$.

Exercice 30.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à (e_i).
Le premier membre vaut ${}^tXPG^{-1}\,{}^tPX = {}^tXX$.

Exercice 32.
2) Soit $P_0 = Q_0'$. Par IPP on obtient Q_0 est orthogonal à la famille $(jX^{j-1} - X^j)_{j \geqslant 1}$ qui est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc $Q_0 = 0 = P_0$ et $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^0 P_0(t)\,\mathrm{d}t \neq \delta_{0,0}$.

Exercice 35.
Soit X la matrice de e_n dans $\mathcal{B}$. On a $GX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et ${}^tXGX = \lambda x_p = 1$. On applique alors les formules de Cramer.

Exercice 38.
3) $\int_{t=0}^{1} t^k t^x \,\mathrm{d}t = 1/(k + x + 1)$.
4) Φ a pour pôles au plus simples $-1, -2, \ldots, -n-1$ et pour racines $0, 1, \ldots, n-1$. Comme $\Phi(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$ on a donc $\Phi(x) = \lambda \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{(x+1)\ldots(x+n+1)}$.
5) $a_k =$ résidu de Φ en $-k-1 = (-1)^{n+k} \lambda \dfrac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}$.

Exercice 39.
$x^2 + (x+y)^2 + (x+2y)^2 = (\sqrt{3}(x-y))^2 + (\sqrt{2}y)^2$.

Exercice 42.
$f \in F^{\perp} \Rightarrow xf \perp f$.

Exercice 43.
2) $30X^2 - 36X + 9$.

Exercice 44.

$P_a(t) = \frac{3}{8}(3 - 5t^2 - 5a^2 + 15a^2t^2) + \frac{5}{8}at(15 - 21t^2 - 21a^2 + 35a^2t^2)$,
$8\|P_a\|^2 = 9 + 45a^2 - 165a^4 + 175a^6$ est maximal pour $a = \pm 1$ et $\|P_a\| = 2\sqrt{2}$.

Exercice 47.

3) Soit $g \in H^\perp$ non nulle. Les formes linéaires : $f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f$ et $f \mapsto \int_0^1 fg$ sont nulles sur H, donc proportionnelles, ce qui est impossible pour g continue.

Exercice 48.

2) $\pi(f)(t) = f(0)\dfrac{\operatorname{sh}(1-t)}{\operatorname{sh}(1)} + f(1)\dfrac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(1)}$.

3) L'inf est atteint pour la fonction $f \in W$ telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$, soit $f(t) = \alpha\dfrac{\operatorname{sh}(1-t)}{\operatorname{sh}(1)} + \beta\dfrac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(1)}$ et $\inf = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh}(1)}$.

Exercice 49.

Soient $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $y = u(z) - z \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$. On a $y = u(z + \lambda x) - (z + \lambda x)$ d'où :

$$\|z + \lambda x\|^2 \geqslant \|u(z + \lambda x)\|^2 = \|z + \lambda x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + 2(z \mid y) + \|y\|^2.$$

En faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on obtient $(x \mid y) = 0$ et on conclut avec le thm. du rang.

Exercice 50.

f linéaire et $f = x \mapsto \|x\|^2$ conviennent et l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f vérifiant la propriété est stable par combinaison linéaire donc toute fonction de la forme $x \mapsto \ell(x) + a\|x\|^2$ avec $\ell \in E^*$ et $a \in \mathbb{R}$ convient. On montre que ce sont les seules : Soit $f \in \mathcal{E}$ l'on décompose en sa partie paire g et sa partie impaire h. Alors $g, h \in \mathcal{E}$.

Soient $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ et $x \perp y$. On a $h(x \pm y) = h(x) \pm h(y)$ et $h(2x) = h(x+y) + h(x-y) = 2h(x)$. Ensuite, $h(2x) + h(x) - h(y) = h(2x + y) + h(x - 2y) = h(3x - y) = h(3x) - h(y)$ d'où $h(3x) = 3h(x)$ et de proche en proche $h(kx) = kh(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis pour $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ successivement vu la continuité de f. En prenant une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormale on a $h(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1h(e_1) + \ldots + x_nh(e_n)$ pour tous $x_1, \ldots, x_n$ réels donc h est linéaire.

Soient à présent $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ alors $g(x + y) + g(x - y) = g(2x)$ et $g(x + y) + g(y - x) = g(2y)$ d'où $g(2x) = g(2y)$. Ainsi g est constante sur les sphères de centre 0. On écrit $g(x) = \varphi(\|x\|^2)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ prolongée à $\mathbb{R}$ par imparité ($g(0) = 0$ de manière évidente).
On a alors $\varphi(a^2 + b^2) = g(ae_1 + be_2) = g(ae_1) + g(be_2) = \varphi(a^2) + \varphi(b^2)$ d'où l'on conclut que φ est linéaire.

Exercice 51.

1) $\dfrac{2^{i+j+1}}{2^{i+j+1}-1}$.

2) Décomposer P, Q sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. On peut aussi remarquer que la série converge car P et Q sont bornés sur $[0,1]$.

4) Si Q existe alors pour $P = X^n$ on obtient :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Q(2^{-k}) = 1 \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+1)k} Q(2^{-k}) = 0 \text{ pour tout } n \leqslant 1.$$

On a facilement $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q(1)$, d'où $Q(1) = 0$ et $2^{n+1} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(n+1)(k-1)} Q(2^{-k}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q(\frac{1}{2})$. Ainsi $Q(\frac{1}{2}) = 0$ et de proche en proche, $Q(2^{-k}) = 0$ pour tout k. Ceci implique $Q = 0$, en contradiction avec la valeur de S_0. Ainsi Φ n'est pas représentable par un produit scalaire, ce qui fournit un contre-exemple au théorème de Riesz en dimension infinie. On peut remarquer d'ailleurs que Φ est discontinue pour le produit scalaire choisi : si $P_n = (1-X)(1-2X)\dots(1-2^nX)$, on a $\Phi(P_n) = 1$ et $\|P_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} P^2(2^{-k}) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 52.

On considère $f : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad \|x\|\|y\| - |(x|y)|. \end{cases}$ On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $A = f^{-1}(]0,+\infty[)$, donc c'est un ouvert car f est continue et $\mathbb{R}^*$ ouvert.