

Produit scalaire

Exercice 1. Produits scalaires ?

Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :

- 1) $E = \mathbb{R}^2$, $((x, x') | (y, y')) = axy + bx'y' + cx'y + dx'y'$ (étudier $((1, t) | (1, t))$, $t \in \mathbb{R}$).
- 2) $E = \mathbb{R}^n$, $((x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n)) = a \sum_i x_i y_i + b \sum_{i \neq j} x_i y_j$ (on montrera que $(\sum x_i)^2 \leq n \sum x_i^2$).
- 3) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P | Q) = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$.

Exercice 2. Intégrale double

Soit D le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 . On considère l'espace E des fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 nulles sur le bord, C , de D .

Pour $f, g \in E$, on pose $(f | g) = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$. Montrer que c'est un produit scalaire.

Exercice 3. Produit scalaire

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose pour $f, g \in E$:

$$(f | g) = \int_{t=a}^b u(t) f(t) g(t) dt.$$

- 1) A quelle condition sur u définit-on ainsi un produit scalaire ?
- 2) Soient u, v deux fonctions convenables. A quelle condition les normes associées sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. Produit scalaire ?

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et (a_n) une suite d'éléments de $[a, b]$.

Pour $f, g \in E$, on pose : $(f | g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(a_n) g(a_n)$.

- 1) A quelle condition sur la suite (a_n) définit-on un produit scalaire ?
- 2) Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux telles suites telles que les ensembles $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.
- 3) Question ouverte : à quelle condition les normes associées à deux suites (a_n) et (b_n) sont-elles équivalentes ?
- 4) Montrer qu'il n'existe pas de suite (a_n) pour laquelle E soit complet.

Exercice 5. Base de Schmidt

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire : $(P | Q) = \int_{t=-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Exercice 6. Base de Schmidt

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $(P | Q) = \sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$. Chercher une base orthonormée de E .

Exercice 7. Trouvez le produit scalaire

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels de degrés étagés ($\deg P_n = n$). Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille (P_n) est orthonormée.

Exercice 8. Somme directe orthogonale

Soit E un espace préhilbertien et F_1, \dots, F_n des sev tels que pour $i \neq j$, $F_i \perp F_j$. Montrer que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

Exercice 9. Espace ℓ^2

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u, v \in E$, on pose : $(u | v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que $(u | v)$ existe.
- 3) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- 4) Montrer que E , muni de la norme associée, est complet.

Exercice 10. $f(x) \perp x \Rightarrow f = 0$

Soit E un espace vectoriel préhilbertien complexe et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout vecteur $x \in E$, on a $f(x) \perp x$.

- 1) Montrer que pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a $(f(x) | y) = 0$.
- 2) Montrer que $f = 0$.
- 3) Comparer avec le cas réel.

Exercice 11. *Équation du second degré*

Soient E ev euclidien, $a \in E$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$. Résoudre l'équation $\alpha(x | x) + \beta(x | a) + \gamma = 0$.

Exercice 12. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E l'ensemble des fonctions : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ continues et $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_a^b f \times \int_a^b 1/f. \end{cases}$

Montrer que $\min\{\Phi(f) \text{ tq } f \in E\} = (b - a)^2$ et chercher les fonctions réalisant le minimum.

Exercice 13. *Inversion*

Soit E un ev euclidien. On pose pour $x \neq 0$: $i(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.

- 1) Montrer que i est une involution et conserve les angles non orientés de vecteurs.
- 2) Vérifier que : $\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \|i(x) - i(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$.
- 3) Déterminer l'image par i :
 - a) d'un hyperplan affine ne passant pas par 0.
 - b) d'une sphère passant par 0.
 - c) d'une sphère ne passant pas par 0.

Exercice 14. *Inégalité de Ptolémée*

Soit E un espace euclidien.

- 1) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que : $\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$.
- 2) Soient $a, b, c, d \in E$. Montrer que $\|a - c\|\|b - d\| \leq \|a - b\|\|c - d\| + \|b - c\|\|a - d\|$. Indication : se ramener au cas $a = 0$ et utiliser l'application f .

Exercice 15. *Calcul de distance*

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P | Q) = \sum_i a_i b_i$. Soit $H = \{P \in E \text{ tq } P(1) = 0\}$.

- 1) Trouver une base orthonormale de H .
- 2) Calculer $d(X, H)$.

Exercice 16. *Calcul de minimums*

Calculer le minimum sur \mathbb{R}^2 de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto \int_{x=0}^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx. \end{cases}$

Exercice 17. *Calcul de minimums*

- 1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \int_{t=0}^1 (1 + tx_1 + \dots + t^n x_n)^2 dt$. Montrer que φ admet un minimum absolu et le calculer lorsque $n = 3$.
- 2) Même question avec $\psi(x_1, \dots, x_n) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} (1 + tx_1 + \dots + t^n x_n)^2 dt$.

Exercice 18. *Expression analytique*

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$ une base orthonormée de E , et F le sev d'équations dans \mathcal{B} :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

- 1) Trouver une base orthonormée de F .
- 2) Donner la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur F .
- 3) Calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 19. Projection sur un hyperplan

On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ où a_1, \dots, a_n sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H .

Exercice 20. Caractérisation des projections orthogonales

Soit E un ev euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. Montrer que :

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Leftrightarrow \forall x, y \in E, (x | p(y)) = (p(x) | y) \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour la deuxième caractérisation, considérer $x \in (\text{Ker } p)^\perp$ et faire un dessin.

Exercice 21. Composition de projecteurs

Soient F, G deux sev d'un ev euclidien E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G . Montrer que $p_F + p_G - p_{F \cap G} = \text{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F \cap G}$.

Exercice 22. Projecteurs commutant

Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } p$ et $(\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } q$ sont orthogonaux.

Exercice 23. Caractérisation des bases orthonormales

Soit E un ev euclidien, et e_1, \dots, e_n des vecteurs unitaires tels que : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2$.

- 1) Démontrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .
- 2) On remplace l'hypothèse : e_i unitaire par : $\dim E = n$.
 - a) Démontrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .
 - b) Démontrer que : $\forall x, y \in E, (x | y) = \sum_{i=1}^n (x | e_i)(y | e_i)$.
 - c) On note G la matrice de Gram de e_1, \dots, e_n . Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

Exercice 24. Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace euclidien, $(y_j)_{j \in I}$ une famille de vecteurs de E telle qu'il existe A et B strictement positifs vérifiant :

$$\forall x \in E, A\|x\|^2 \leq \sum_{j \in I} (x | y_j)^2 \leq B\|x\|^2.$$

- 1) Montrer que $(y_j)_{j \in I}$ engendre E .
- 2) On choisit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que $y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $y_3 = y_2$ conviennent.
- 3) Si $A = B = 1$ et $\|y_j\| = 1$ pour tout j , montrer que $(y_j)_{j \in I}$ est une base orthonormale.
- 4) Si $A = B$, montrer que pour tout $x \in E$, $x = \frac{1}{A} \sum_{j \in I} (x | y_j) y_j$.

Exercice 25. Déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien et $u_1, \dots, u_n \in E$. On note $G = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de Gram de ces vecteurs ($g_{ij} = (u_i | u_j)$).

- 1) On suppose E de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Exprimer G en fonction de $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.
- 2) En déduire que $\det(G)$ est un réel positif ou nul, et nul si et seulement si les vecteurs u_i sont liés.
- 3) Montrer le même résultat sans supposer que E est de dimension finie.
- 4) Examiner le cas particulier $n = 2$.
- 5) Application : Le tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

Exercice 26. Angles $> 2\pi/3$

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Montrer qu'il n'existe pas trois vecteurs u_1, u_2, u_3 unitaires faisant entre eux deux à deux des angles strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 27. Matrice de Gram

Soient x_1, \dots, x_n des vecteurs d'un ev euclidien E , et $G(x_1, \dots, x_n)$ leur matrice de Gram.

- 1) Montrer que $\text{rg } G(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
- 2) Montrer que $\det G(x_1, \dots, x_n)$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.
- 3) Soit $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$. On note $d(x, F) = \min(\|x - y\|, y \in F)$.

Montrer que $d(x, F)^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_n, x)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}$.

Exercice 28. Congruence des matrices de Gram

Soit E un ev hermitien et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases quelconques. On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , et G, G' les matrices de Gram de \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

Exercice 29. Gram($u(e_i)$)

Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et (e_1, \dots, e_n) une base quelconque de E . On note G le déterminant de Gram. Montrer que $G(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (\det u)^2 G(e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 30. Forme quadratique associée à la matrice de Gram

Soit E un espace euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base de E , G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.

Montrer que : $\forall x \in E, \sum_{i,j} a_{ij}(e_i | x)(e_j | x) = \|x\|^2$.

Exercice 31. Vecteur défini par ses produits scalaires

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Existe-t-il $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall i, \int_{t=0}^1 f(t) f_i(t) dt = 1$?

Exercice 32. Famille duale de $1, X, X^2, \dots$

1) Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall i, j \leq n, \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} P_j(t) dt = \delta_{ij}$.

2) Montrer qu'il n'existe pas de suite de polynômes (P_0, \dots, P_n, \dots) telle que :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} P_j(t) dt = \delta_{ij}.$$

Exercice 33. Décomposition QR

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P , et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T , uniques telles que $M = PT$.

2) Application : inégalité de Hadamard. Soit E un espace vectoriel euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée, et u_1, \dots, u_n des vecteurs quelconques.

Démontrer que $|\det_{(e_i)}(u_j)| \leq \prod_j \|u_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 34. Coefficients diagonaux dans la méthode de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée déduite de \mathcal{B} par la méthode de Schmidt. On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

Montrer que $P_{ii} \times d(u_i, \text{vect}(u_1, \dots, u_{i-1})) = 1$.

Exercice 35. Coordonnées des vecteurs de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée déduite de \mathcal{B} par la méthode de Schmidt.

On note G_n le déterminant de Gram de u_1, \dots, u_n , et $\Delta_{i,n}$ le cofacteur de $(u_i | u_n)$ dans G_n .

Montrer que $e_n = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1} G_n}} \sum_{i=1}^n \Delta_{i,n} u_i$.

Exercice 36. $\det({}^t AA)$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det({}^t AA) \geq 0$.

Exercice 37. Polynômes orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $(P | Q) = \int_{t=0}^1 P(t)Q(t) dt$

- 1) Démontrer que $(|)$ est un produit scalaire sur E .
- 2) Démontrer qu'il existe une unique famille $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i = i \\ \text{le coefficient dominant de } P_i \text{ est strictement positif} \\ \text{la famille } (P_i) \text{ est orthonormée.} \end{cases}$$

Exercice 38. Polynômes orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P | Q) = \int_{t=0}^1 P(t)Q(t) dt$.

- 1) Montrer que E , muni de $(|)$, est un espace euclidien.
- 2) Soit $K = \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ et $P \in K \setminus \{0\}$. Quel est le degré de P ?
- 3) Soit $\Phi : x \mapsto \int_{t=0}^1 P(t)t^x dt$. Montrer que Φ est une fonction rationnelle.
- 4) Trouver Φ à une constante multiplicative près.
- 5) En déduire les coefficients de P .
- 6) En déduire une base orthogonale de E .

Exercice 39. Réduction en carrés d'une forme quadratique

Soient f_1, \dots, f_p , p formes linéaires sur \mathbb{R}^n telles que $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = n$.

En considérant le produit scalaire : $(x | y) = \sum_{i=1}^p f_i(x)f_i(y)$, démontrer qu'il existe n formes linéaires g_1, \dots, g_n telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^p f_i(x)^2 = \sum_{i=1}^n g_i(x)^2.$$

exemple : réduire $x^2 + (x+y)^2 + (x+2y)^2$

Exercice 40. Famille de vecteurs unitaires équidistants

Soit E un ev euclidien, et (x_1, \dots, x_n) une famille libre. Démontrer qu'il existe une famille (u_1, \dots, u_n) vérifiant :

$$u_i \text{ est unitaire, } \|u_i - u_j\| = 1, \quad \text{vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{vect}(x_1, \dots, x_i).$$

Démontrer que toute famille (u_1, \dots, u_n) vérifiant les deux premières propriétés est libre.

Exercice 41. Famille obtusangle

Soit E un ev euclidien et u_1, \dots, u_n une famille de vecteurs vérifiant : $\forall i \neq j, (u_i | u_j) < 0$.

- 1) On suppose (u_1, \dots, u_n) libre. Soit (e_1, \dots, e_n) la famille de Schmidt associée et M la matrice de passage de (u_1, \dots, u_n) à (e_1, \dots, e_n) . Montrer que M est à coefficients positifs.
- 2) Dans le cas général, démontrer par récurrence sur n que $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) \geq n - 1$.
- 3) Si $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n - 1$, démontrer que toute famille de $n - 1$ vecteurs extraite de (u_1, \dots, u_n) est libre, et que les composantes dans cette famille du vecteur retiré sont strictement négatives.

Exercice 42. $F + F^\perp \neq E$

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(f | g) = \int_{t=0}^1 f(t)g(t) dt$, et $F = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$.

Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 43. Forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $(P | Q) = \int_{t=0}^1 PQ(t) dt$.

- 1) Vérifier que c'est effectivement un produit scalaire.
- 2) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(0). \end{cases}$ Trouver le polynôme A tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P) = (A | P)$.

Exercice 44. Norme uniforme sur $\mathbb{R}_3[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que $\int_{t=-1}^1 P^2(t) dt = 1$.

Montrer que $\sup\{|P(x)| \text{ tq } -1 \leq x \leq 1\} \leq 2\sqrt{2}$.

Indication : pour $a \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], P(a) = \int_{t=-1}^1 P(t)P_a(t) dt$.
Calculer explicitement P_a , et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 45. *Hanh-Banach pour une boule*

Soit E un espace préhilbertien réel et B une boule ouverte de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall x \in B, f(x) > 0$.

Exercice 46. *Orthogonal de $\mathbb{R}[X]$*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sev des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0, 1]$.

- 1) Montrer que $g \notin F$.
- 2) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.
- 3) En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 47. *Orthogonal d'un hyperplan*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et, pour $f \in E : \varphi(f) = \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f(t) dt$.

- 1) Montrer que φ est continue.
- 2) Montrer que $H = \text{Ker } \varphi$ est fermé.
- 3) Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

Exercice 48. *Centrale MP 2000*

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \int_{[0,1]} fg + f'g'$.

- 1) Montrer que φ est un produit scalaire.
- 2) Soit $V = \{f \in E \text{ tq } f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \text{ tq } f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W .
- 3) Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E \text{ tq } f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf_{f \in E_{\alpha\beta}} \int_{[0,1]} f^2 + f'^2$.

Exercice 49. $\|u(x)\| \leq \|x\|$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.

Montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$.

Exercice 50. *X MP* 2000*

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. Trouver toutes les fonctions f de E dans \mathbb{R} continues telles que $u \perp v \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Exercice 51. *Magistère de Ker Lann 2010*

1) Calculer pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{2^k}\right)^i \left(\frac{1}{2^k}\right)^j$.

2) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} P\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

3) On note $(P | Q)$ cette limite. Justifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4) Soit la forme linéaire $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(0). \end{cases}$

Montrer qu'il n'existe pas de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) = (P | Q)$. Commenter.

Exercice 52. *Familles libres, Mines 2015*

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien. Montrer que $A = \{(x, y) \in E \times E, (x, y) \text{ est libre}\}$ est ouvert.

Exercice 53. *Mines 2017*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X, {}^tYA = \lambda {}^tY, {}^tYX \neq 0$ et $\text{rg}(A - \lambda I_n) = n - 1$. Montrer que λ est valeur propre simple de A .

Indication : considérer $E = \{Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tYZ = 0\}$. Quel lien y a-t-il entre A et E ?

solutions

Exercice 1.

- 1) $a > 0, b = c, d > 0, ad - bc > 0.$
- 2) $a - b > 0$ et $a + (n - 1)b > 0.$

Exercice 3.

- 1) $u \geq 0$ et $u^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.
- 2) Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha u \leq v \leq \beta u.$

Exercice 4.

- 1) (a_n) est partout dense.
- 4) Si les a_n sont distincts, on choisit pour tout n une fonction f_n comprise entre 0 et 1 valant alternativement 1 et -1 en $a_0, \dots, a_n.$ Alors la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas car si $f_n \rightarrow f$ alors $f^2 = 1,$ absurde.

Exercice 5.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, X\sqrt{\frac{3}{2}}, (3X^2 - 1)\sqrt{\frac{5}{8}} + (5X^3 - 3X)\sqrt{\frac{7}{8}} \right).$$

Exercice 6.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{X-2}{\sqrt{10}}, \frac{X^2-4X+2}{\sqrt{14}}.$$

Exercice 10.

- 1) $(f(x) | y) = -(f(y) | x)$ et $(f(ix) | y) = -(f(y) | ix).$

Exercice 11.

sphère de centre $-\frac{\beta a}{2\alpha},$ ce point ou $\emptyset.$

Exercice 12.

$f = \text{cste}.$

Exercice 13.

- 2) Élever au carré.
- 3) a) $(x | u) = 1 \Leftrightarrow (ix | u - i(x)) = 0 :$ sphère passant par 0.
b) hyperplan ne passant pas par 0.
c) $\|x - a\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \left\| x - \frac{a}{\|a\|^2 - R^2} \right\|^2 = \frac{R^2}{(\|a\|^2 - R^2)^2} :$ sphère ne passant pas par 0.

Exercice 14.

- 1) Élever au carré.

Exercice 15.

- 2) $1/\sqrt{n+1}.$

Exercice 16.

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}, b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}, m = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}.$$

Exercice 17.

- 1) $\frac{1}{16}.$
- 2) $\frac{1}{4}.$

Exercice 18.

- 1) $(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -4, 3)).$
- 2) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$
- 3) $\sqrt{\frac{7}{10}}.$

Exercice 19.

$$\frac{1}{\sum a_i^2} (I - (a_i a_j)).$$

Exercice 22.

Si $p \circ q = q \circ p$: Soient $x \in (\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } p$ et $y \in (\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } q$.
Alors $p \circ q(x) = q(x) \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, donc $(q(x) | y) = (x | y) = 0$.

Si $A = (\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } p$ et $B = (\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } q$ sont orthogonaux : Alors $\text{Im } p = (\text{Im } p \cap \text{Im } q) \oplus A$,
 $\text{Im } q = (\text{Im } p \cap \text{Im } q) \oplus B$, et $E = (\text{Im } p \cap \text{Im } q) \oplus A \oplus B \oplus (\text{Im } p^\perp \cap \text{Im } q^\perp)$. Par décomposition, on obtient $p \circ q = q \circ p =$ la projection orthogonale sur $\text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Exercice 23.

1) $\sum_{i=1}^n (e_j | e_i)^2 = 1 \Rightarrow$ famille orthonormée et $\text{vect}(e_i)^\perp = \{0\}$.

Exercice 24.

- 1) Le sev engendré a un orthogonal nul.
- 2) N'importe quelle famille génératrice convient (équivalence des normes).
- 3) $1 = \|y_i\|^2 = \|y_i\|^4 + \sum_{j \neq i} (y_i | y_j)^2 \Rightarrow \forall j \neq i, (y_i | y_j) = 0$.
- 4) Par polarisation on a : $\forall x, y, \sum_{j \in I} (x | y_j)(y | y_j) = A(x | y)$ donc $\sum_{j \in I} (x | y_j)y_j - Ax \in E^\perp$.

Exercice 25.

5) $\frac{1}{12}$.

Exercice 26.

$$\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 < 0.$$

Exercice 30.

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E et P la matrice de passage de \mathcal{B} à (e_i) .
Le premier membre vaut ${}^t X P G^{-1} {}^t P X = {}^t X X$.

Exercice 32.

2) Soit $P_0 = Q'_0$. Par IPP on obtient Q_0 est orthogonal à la famille $(jX^{j-1} - X^j)_{j \geq 1}$ qui est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc $Q_0 = 0 = P_0$ et $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^0 P_0(t) dt \neq \delta_{0,0}$.

Exercice 35.

Soit X la matrice de e_n dans \mathcal{B} . On a $GX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et ${}^t X G X = \lambda x_p = 1$. On applique alors les formules de Cramer.

Exercice 38.

- 3) $\int_{t=0}^1 t^k t^x dt = 1/(k+x+1)$.
- 4) Φ a pour pôles au plus simples $-1, -2, \dots, -n-1$ et pour racines $0, 1, \dots, n-1$. Comme $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$
on a donc $\Phi(x) = \lambda \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+1)\dots(x+n+1)}$.
- 5) $a_k =$ résidu de Φ en $-k-1 = (-1)^{n+k} \lambda \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}$.

Exercice 39.

$$x^2 + (x+y)^2 + (x+2y)^2 = (\sqrt{3}(x-y))^2 + (\sqrt{2}y)^2.$$

Exercice 42.

$$f \in F^\perp \Rightarrow xf \perp f.$$

Exercice 43.

2) $30X^2 - 36X + 9$.

Exercice 44.

$$P_a(t) = \frac{3}{8}(3 - 5t^2 - 5a^2 + 15a^2t^2) + \frac{5}{8}at(15 - 21t^2 - 21a^2 + 35a^2t^2),$$

$$8\|P_a\|^2 = 9 + 45a^2 - 165a^4 + 175a^6 \text{ est maximal pour } a = \pm 1 \text{ et } \|P_a\| = 2\sqrt{2}.$$

Exercice 47.

3) Soit $g \in H^\perp$ non nulle. Les formes linéaires : $f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f$ et $f \mapsto \int_0^1 fg$ sont nulles sur H , donc proportionnelles, ce qui est impossible pour g continue.

Exercice 48.

$$2) \pi(f)(t) = f(0) \frac{\text{sh}(1-t)}{\text{sh}(1)} + f(1) \frac{\text{sh}(t)}{\text{sh}(1)}.$$

3) L'inf est atteint pour la fonction $f \in W$ telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$, soit $f(t) = \alpha \frac{\text{sh}(1-t)}{\text{sh}(1)} + \beta \frac{\text{sh}(t)}{\text{sh}(1)}$
 et $\inf = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \text{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\text{sh}(1)}.$

Exercice 49.

Soient $x \in \text{Ker}(u - \text{id})$ et $y = u(z) - z \in \text{Im}(u - \text{id})$. On a $y = u(z + \lambda x) - (z + \lambda x)$ d'où :

$$\|z + \lambda x\|^2 \geq \|u(z + \lambda x)\|^2 = \|z + \lambda x\|^2 + 2\lambda(x | y) + 2(z | y) + \|y\|^2.$$

En faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on obtient $(x | y) = 0$ et on conclut avec le thm. du rang.

Exercice 50.

f linéaire et $f = x \mapsto \|x\|^2$ conviennent et l'ensemble \mathcal{E} des fonctions f vérifiant la propriété est stable par combinaison linéaire donc toute fonction de la forme $x \mapsto \ell(x) + a\|x\|^2$ avec $\ell \in E^*$ et $a \in \mathbb{R}$ convient. On montre que ce sont les seules : Soit $f \in \mathcal{E}$ l'on décompose en sa partie paire g et sa partie impaire h . Alors $g, h \in \mathcal{E}$.

Soient $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ et $x \perp y$. On a $h(x \pm y) = h(x) \pm h(y)$ et $h(2x) = h(x+y) + h(x-y) = 2h(x)$. Ensuite, $h(2x) + h(x) - h(y) = h(2x+y) + h(x-2y) = h(3x-y) = h(3x) - h(y)$ d'où $h(3x) = 3h(x)$ et de proche en proche $h(kx) = kh(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis pour $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ successivement vu la continuité de f . En prenant une base (e_1, \dots, e_n) orthonormale on a $h(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1h(e_1) + \dots + x_nh(e_n)$ pour tous x_1, \dots, x_n réels donc h est linéaire.

Soient à présent $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ alors $g(x+y) + g(x-y) = g(2x)$ et $g(x+y) + g(y-x) = g(2y)$ d'où $g(2x) = g(2y)$. Ainsi g est constante sur les sphères de centre 0. On écrit $g(x) = \varphi(\|x\|^2)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ prolongée à \mathbb{R} par imparité ($g(0) = 0$ de manière évidente).

On a alors $\varphi(a^2 + b^2) = g(ae_1 + be_2) = g(ae_1) + g(be_2) = \varphi(a^2) + \varphi(b^2)$ d'où l'on conclut que φ est linéaire.

Exercice 51.

- 1) $\frac{2^{i+j+1}}{2^{i+j+1} - 1}$.
- 2) Décomposer P, Q sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. On peut aussi remarquer que la série converge car P et Q sont bornés sur $[0, 1]$.
- 4) Si Q existe alors pour $P = X^n$ on obtient :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Q(2^{-k}) = 1 \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+1)k} Q(2^{-k}) = 0 \text{ pour tout } n \leq 1.$$

On a facilement $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q(1)$, d'où $Q(1) = 0$ et $2^{n+1} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(n+1)(k-1)} Q(2^{-k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q(\frac{1}{2})$. Ainsi $Q(\frac{1}{2}) = 0$ et de proche en proche, $Q(2^{-k}) = 0$ pour tout k . Ceci implique $Q = 0$, en contradiction avec la valeur de S_0 . Ainsi Φ n'est pas représentable par un produit scalaire, ce qui fournit un contre-exemple au théorème de Riesz en dimension infinie. On peut remarquer d'ailleurs que Φ est discontinue pour le produit scalaire choisi : si $P_n = (1 - X)(1 - 2X) \dots (1 - 2^n X)$, on a $\Phi(P_n) = 1$ et $\|P_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} P^2(2^{-k}) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 52.

On considère $f : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \|x\|\|y\| - |(x|y)|. \end{cases}$ On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $A = f^{-1}(]0, +\infty[)$, donc c'est un ouvert car f est continue et \mathbb{R}^* ouvert.

Exercice 53.

Comme $X \neq 0$ (ou $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$), λ est effectivement valeur propre de A . L'ensemble E est Y^\perp , c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la relation ${}^t Y A = \lambda {}^t Y$ montre qu'il est stable par A . De plus, $X \notin E$ donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E \oplus \langle X \rangle$ et ces deux sous-espaces sont stables par A , d'où $\chi_A(x) = \chi_{A|_E}(x)(x - \lambda)$. Il n'y a plus qu'à prouver que λ n'est pas valeur propre de $A|_E$ et ceci résulte des faits que le sous-espace propre est de dimension 1 et contient déjà X .