# Problèmes matriciels

**Exercice 1.** *$I + a(X^tY - Y^tX)$ inversible ?*
Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ indépendantes, $a \in \mathbb{R}$ et $M$ la matrice $n \times n$ telle que $m_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$.
A quelle condition $I + aM$ est-elle inversible ?

**Exercice 2.** *Matrice orthogonale pour une forme $(p, q)$*
Soit $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ telle que ${}^tMJM = J$. Montrer que $A$ et $D$ sont inversibles.

**Exercice 3.** *Calcul d'inverse*
Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, avec $a, b, c, d$ non tous nuls.
Démontrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.

**Exercice 4.** *Matrices normales*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $AA^* = A^*A \Leftrightarrow \mathrm{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2$.

**Exercice 5.** *Dérivée d'une orthogonale*
Soit $S$, matrice orthogonale d'ordre impair, de coefficients fonction de $t$ dérivables. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ n'est pas inversible.

**Exercice 6.** *Matrice orthogonale ?*
Déterminer $a, b, c$, réels non nuls pour que la matrice $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1/2 & a/c & a/b \\ c/a & -1/2 & c/a \\ b/a & a/c & -1/2 \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une isométrie.

**Exercice 7.** *Noyaux de $A$ et ${}^tA$*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{tr}({}^tXAX) \geqslant 0$. Comparer les noyaux de $A$ et ${}^tA$.

**Exercice 8.** *Matrice orthogonale ?*
**1)** Peut-on définir sur $\mathbb{R}^2$ une structure euclidienne telle que l'endomorphisme $f$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ soit une rotation ?
**2)** Généraliser à une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque.
**3)** Généraliser à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

**Exercice 9.** *Valeurs propres d'une matrice complexe*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathrm{sp}(M)$. Montrer que $\Re(\lambda)$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur propre de $\frac{1}{2}(M + M^*)$.

**Exercice 10.** *Centrale MP 2001*
**1)** Montrer que toute matrice symétrique réelle positive a ses coefficients diagonaux positifs. Montrer que si l'un des coefficients diagonaux $u_{ii}$ est nul, alors pour tout $j$ on a $u_{ij} = 0$.
**2)** $U$ est une matrice symétrique réelle positive de la forme $U = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & B \end{pmatrix}$ avec $A$ et $B$ carrées. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

**Exercice 11.** *orthotrigonalisation, Centrale MP 2010*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

**Exercice 12.** *Centrale MP 2001*

**1)** Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ montrer l'existence de deux matrices orthogonales $U$ et $V$ telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.

**2)** Même question pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**3)** Déterminer $U$ et $V$ pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 13.** *X MP* 2001*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

**1)** Montrer que $n$ est pair.

**2)** Montrer que $A$ est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$.

**3)** On suppose $A \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que $A$ est semblable à la matrice $A'$ précédente avec une matrice de passage orthogonale.

**Exercice 14.** *X MP* 2001*

Soient $A$ et $B$ deux matrices hermitiennes et $C = A + B$. On note $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$ les valeurs propres de la première, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n$ celles de la deuxième, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \dots \geqslant c_n$ celles de la troisième. Montrez que pour tout $i$ on a $c_i \geqslant a_i + b_n$. *Indication : se ramener au cas* $b_n = 0$.

**Exercice 15.** *Centrale MP 2002*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients réels, $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices positives, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices définies positives et $\varphi \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}))$. On suppose que $\varphi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

**1)** Montrer que : $\forall M \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists A \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall \lambda > A$, $M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

**2)** Montrer que $\varphi \in GL(S_n(\mathbb{R}))$ et que $\varphi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.

**3)** On suppose $n = 2$ et $\varphi(I_2) = I_2$. Montrer que : $\forall M \in S_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\varphi(M)} = \chi_M$.
Montrer que $\det(\varphi(M)) = \det(M)$ (i.e. $\varphi$ conserve le déterminant).

**Exercice 16.** *Mines MP 2002*

Déterminer $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } M({}^tMM)^2 = I_n\}$.

## solutions

**Exercice 1.**
$M = X^tY - Y\,^tX$. Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $(I + aM)Z = 0$. Donc $Z \in \mathrm{vect}(X, Y)$ : $Z = \lambda X + \mu Y$. On remplace : $(1 - a^tYX)\lambda - a^tYY\mu = a^tXX\lambda + (1 + a^tYX)\mu = 0$.
CNS $\Leftrightarrow a^2({}^tXX\,{}^tYY - ({}^tXY)^2) + 1 \neq 0$.

**Exercice 2.**
On a ${}^tAA - {}^tCC = I_n$. Soit $X$ tel que $AX = 0$. Donc ${}^tXX = -{}^t(CX)(CX)$, donc $X = 0$.

**Exercice 3.**
$A\,{}^tA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I$.

**Exercice 4.**
Trigonaliser $A$ dans une base orthonormée.

**Exercice 6.**
$a = b = \pm c$.

**Exercice 7.**
Ils sont égaux (décomposer $A$ en symétrique + antisymétrique).

**Exercice 8.**
**1)** $\mathrm{sp}(M) = \{j, j^2\} \Rightarrow$ on prend comme base orthonormale $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}(2f(a) + a) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
**2)** $M$ est une matrice de rotation ssi $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{U} \setminus \{\pm 1\}$ ou $M = \pm I$.
**3)** $M$ est la matrice d'une application orthogonale ssi $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{U}$ et $M$ est $\mathbb{C}$-diagonalisable (alors $M$ est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de rotation).

**Exercice 10.**
**1)** Inégalité de Cauchy-Schwarz.
**2)** Il existe $P$ orthogonale de même taille que $A$ telle que $D = {}^tPAP$ est diagonale positive.
Alors $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ {}^tCP & B \end{pmatrix}$ est symétrique positive donc si $d_{ii} = 0$ alors la ligne $i$ de ${}^tPC$ est nulle. Ainsi $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U' \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est, après renumérotation éventuelle des lignes et colonnes, de la forme $U'' = \begin{pmatrix} D' & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $D'$ est diagonale inversible et $U'$ est semblable à $U''$. Enfin $U''$ est diagonalisable : $\begin{pmatrix} I & D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} U'' \begin{pmatrix} I & -D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11.**
Transformer une base de trigonalisation de $A$ par l'algorithme de Schmidt.

**Exercice 12.**

**1)** Si ${}^tUMV = D$ est diagonale alors ${}^tMM = VD^2\,{}^tV$. Inversement, comme ${}^tMM$ est symétrique définie positive, il existe $D$ diagonale inversible et $V$ orthogonale telles que ${}^tMM = VD^2\,{}^tV$. On pose $M = UD\,{}^tV$ ce qui définit $U$ puisque $D\,{}^tV$ est inversible et on a $VD^2\,{}^tV = {}^tMM = VD\,{}^tUUD\,{}^tV$ d'où ${}^tUU = I$.

**2)** $M$ est limite de matrices $M_k$ inversibles que l'on peut décomposer sous la forme $M_k = U_kD_k{}^tV_k$ avec $U_k, V_k$ orthogonales et $D_k$ diagonale. Comme $\mathcal{O}(n)$ est compact on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que les suites $(U_k)$ et $(V_k)$ convergent vers des matrices $U, V$ orthogonales d'où ${}^tUMV = \lim_{k\to\infty} {}^tU_kM_kV_k = \lim_{k\to\infty} D_k = D$ diagonale.

**3)** En diagonalisant ${}^tMM$ on trouve $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $D$ n'est pas inversible il faut ruser pour trouver $U$. On donne des coefficients indéterminés à $U$ et on écrit que ${}^tUMV = D$ ce qui donne $U = \begin{pmatrix} a & b+\sqrt{2} & c \\ -a-\frac{3}{\sqrt{6}} & -b-\frac{1}{\sqrt{2}} & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On choisit alors $a, b, c$ de sorte que $U \in \mathcal{O}(3)$ d'où, par exemple, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

**Exercice 13.**

**1)** $\det(A)^2 = (-1)^n$.

**2)** $A$ est $\mathbb{C}$-diagonalisable (annulateur simple) et ses valeurs propres sont $i, -i$ avec la même multiplicité ($A$ est réelle). La matrice $A'$ donnée a les mêmes propriétés donc $A$ et $A'$ sont $\mathbb{C}$-semblables à la même matrice diagonale, et donc $\mathbb{C}$-semblables l'une à l'autre. Comme la $\mathbb{C}$-similitude entre matrices réelles est équivalente à la $\mathbb{R}$-similitude (résultat bien connu), $A$ et $A'$ sont $\mathbb{R}$-semblables.

**3)** Soit $e_1$ unitaire et $e_1' = Ae_1$. Alors $e_1'$ est unitaire et $Ae_1' = -e_1$ d'où

$$(e_1 \mid e_1') = (Ae_1 \mid Ae_1') = -(e_1 \mid e_1') = 0$$

donc $(e_1, e_1')$ est une famille orthonormale. Si $F_1$ est le sev engendré par $(e_1, e_1')$ alors $F_1^\perp$ est stable par $A$ donc on peut construire par récurrence une base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n/2}, e_1', \dots, e_{n/2}')$ telle que $Ae_i = e_i'$ et $Ae_i' = -e_i$.

**Exercice 14.**

On remplace $A$ par $A + b_nI$ et $B$ par $B - b_nI$ ce qui ne modifie pas $C$. Maintenant les valeurs propres de $B$ sont positves donc pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a $(Ax \mid x) \leqslant (Cx \mid x)$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base orthonormale propre pour $A$ et $(y_1, \dots, y_n)$ une base orthonormale propre pour $C$. Si $z \in \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_i)$ alors $(Az \mid z) \geqslant a_i\|z\|^2$ et si $z \in \mathrm{vect}(y_i, \dots, y_n)$ alors $(Az \mid z) \leqslant (Cz \mid z) \leqslant c_i\|z\|^2$. Or $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_i)$ et $\mathrm{vect}(y_i, \dots, y_n)$ ont une intersection non triviale (la somme des dimensions est égale à $n+1$) donc il existe $z \neq 0$ tel que $a_i\|z\|^2 \leqslant c_i\|z\|^2$ d'où $a_i \leqslant c_i$.

**Exercice 15.**

**1)** Prendre $A$ supérieur ou égal à la plus petite des valeurs propres de $-M$.

**2)** Surjectivité de $\varphi$ : $\operatorname{Im}\varphi$ est un sev de $S_n(\mathbb{R})$ contenant $S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc contenant $\operatorname{vect}(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. On en déduit que $\varphi$ est un isomorphisme grâce au théorème du rang.

Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M + I_n/p)$ donc $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$.
Réciproquement, si $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M_p)$ avec $M_p$ définie positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a ${}^t xMx = \lim_{p\to\infty}({}^t xM_p x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi : $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$. Comme $\varphi$ est continue (car linéaire en dimension finie) on en déduit $\varphi(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$. De plus, $\varphi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$ soit $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(S_n^{++}(\mathbb{R}))$. Comme $\varphi^{-1}$ est une application linéaire continue : $\varphi^{-1}(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$, d'où $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \varphi(S_n^+(\mathbb{R}))$.

**3)** Soit $M \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres $a, b$ avec $a \leqslant b$, et soient $a' \leqslant b'$ les valeurs propres de $\varphi(M)$. Pour tout $\lambda > -b$ on a $M + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ donc $\varphi(M) + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\lambda > b'$. Ceci prouve que $b' \leqslant b$ et on montre l'égalité en considérant $\varphi^{-1}$. De même, en considérant $-M$ on montre que $a' = a$. Finalement $\chi_M = (X-a)(X-b) = \chi_{\varphi(M)}$. De plus, $\det(M) = ab = \det(\varphi(M))$.

Remarque : soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$. On sait que $A'$ est orthodiagonalisable avec pour valeurs propres 0 et 1, donc il existe $P \in \mathcal{O}(2)$ telle que $A' = {}^t PAP$. $A' + B' = \varphi(I_2) = I_2$ d'où $B' = I_2 - A' = {}^t PBP$. Posons $C' = {}^t P\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}P$. $0 = \operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(C') = u + w$ et $-1 = \det(C) = \det(C') = uw - v^2$ donc $w = -u$ et $u^2 + v^2 = 1$. De plus, $-1 = \det(A + C) = -u - u^2 - v^2$ d'où $u = 0$ et $v = \pm 1$.

Si $v = 1$ alors $C' = {}^t PCP$ et par linéarité, $\varphi(M) = {}^t PMP$ pour toute $M \in S_2(\mathbb{R})$. Si $v = -1$ on trouve de même $\varphi(M) = {}^t QMQ$ avec $Q = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2)$. Réciproquement, toute application de la forme $M \mapsto {}^t PMP$ avec $P \in \mathcal{O}(2)$ vérifie les hypothèses de la question. Les fonctions $\varphi$ linéaires vérifiant la seule condition $\varphi(S_2^{++}(\mathbb{R})) = S_2^{++}(\mathbb{R})$ sont les fonctions de la forme $M \mapsto {}^t PMP$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ (écrire $\varphi(I_2) = {}^t TT$ puis considérer $M \mapsto {}^t T^{-1}\varphi(M)T^{-1}$).

Généralisation en dimension quelconque ?

**Exercice 16.**

$M = ({}^t MM)^{-2}$ est symétrique définie positive, donc diagonalisable en base orthonormale. En examinant la forme diagonale on trouve $M = I$.