Ev euclidien orienté de dimension 3

Exercice 1. *Propriétés du produit vectoriel*
Soient u, v, w, t quatre vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :

$$(u \wedge v) \mid (w \wedge t) = (u \mid w)(v \mid t) - (u \mid t)(v \mid w)$$
$$(u \wedge v) \wedge (w \wedge t) = -[u, v, w]t + [u, v, t]w$$
$$[t, v, w]u + [u, t, w]v + [u, v, t]w = [u, v, w]t.$$

Exercice 2. *Division vectorielle*
Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3 et a, b deux vecteurs donnés, $a \neq 0$. Étudier l'équation : $a \wedge x = b$. On cherchera une solution particulière de la forme $x = a \wedge y$.

Exercice 3. *$a \wedge b$, $b \wedge c$, $c \wedge a$ donnés*
Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3.
Trouver a, b, c connaissant $u = a \wedge b$, $v = b \wedge c$ et $w = c \wedge a$ (calculer $u \wedge v$).

Exercice 4. *$f(u) \wedge v + u \wedge f(v) = g(u \wedge v)$*
Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1) Prouver que : $[f(u), v, w] + [u, f(v), w] + [u, v, f(w)] = [u, v, w]\operatorname{tr}(f)$.
2) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall\, u, v$, on a $f(u) \wedge v + u \wedge f(v) = g(u \wedge v)$.
3) Dans une base orthonormale directe, exprimer la matrice de g en fonction de celle de f.

Exercice 5. *Applications bilinéaires antisymétriques*
Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3 et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire antisymétrique.
Montrer qu'il existe $f \in E^*$ unique telle que : $\forall\, x, y$, $\varphi(x, y) = f(x \wedge y)$.

Exercice 6. *Volume d'un parallélépipède*
Soient u, v, w trois vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension 3.
On donne $\|u\| = a$, $\|v\| = b$, $\|w\| = c$, $\overline{(u, v)} \equiv \alpha$, $\overline{(v, w)} \equiv \beta$, $\overline{(w, u)} \equiv \gamma$.
Quel est le volume du parallélépipède construit sur u, v, w ?

Exercice 7. *Applications conservant le produit vectoriel*
Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3. Trouver les applications $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :
1) $\forall\, u, v$, $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.
2) $\forall\, u, v$, $f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$.

Exercice 8. *Expression d'une rotation*
Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3, $u \in E$ unitaire, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la rotation autour de u d'angle de mesure α.
1) Exprimer $f(x)$ en fonction de u, x et α.
2) On donne les coordonnées de u dans une base orthonormée : a, b, c. Calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 9. *Conjuguée d'une rotation*
Soit ρ une rotation d'un ev euclidien orienté de dimension 3, et $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaître $f \circ \rho \circ f^{-1}$.
Application : Déterminer le centre de $\mathcal{O}^+(E)$.

Exercice 10. *Conjugaison dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$*
Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ ayant même polynôme caractéristique.
Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.
Si f et g sont positifs, a-t-on h positif ?

Exercice 11. *Décomposition des rotations*

Soit (i,j,k) une base orthonormée directe d'un ev euclidien orienté de dimension 3 E, et $f \in \mathcal{O}^+(E)$.

1) On suppose $f(j) \perp i$. Montrer qu'il existe r, r' rotations autour de j et i telles que $r' \circ r = f$.

2) En déduire que tout $f \in \mathcal{O}^+(E)$ se décompose de deux manières sous la forme : $f = r'' \circ r' \circ r$ où r, r'' sont des rotations autour de j et r' est une rotation autour de i.

3) Décomposer $(x,y,z) \mapsto (y,x,z)$ et $(x,y,z) \mapsto (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)$.

Exercice 12. *Sous-groupes finis de $\mathcal{O}^+(3)$*

Déterminer les sous-groupes de $\mathcal{O}^+(3)$ de cardinal 2,3, ou 4.

Exercice 13. *Applications antisymétriques*

Soit E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique.

1) Montrer que $\mathrm{id}_E + f \in GL(E)$.

2) Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$ et $\mathrm{id} + g$ est inversible.

3) Réciproquement, soit $h \in \mathcal{O}^+(E)$ tq $\mathrm{id} + h$ soit inversible. Montrer qu'il existe f antisymétrique tel que $h = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$.

Exercice 14. *Applications antisymétriques*

Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans $\mathcal{B}$: $M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

1) Reconaître f.

2) Montrer que $\mathrm{id}_E + f$ est une bijection et calculer la bijection réciproque.

3) Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$ est une rotation et préciser son axe et son angle.

Exercice 15. *Exponentielle d'une application antisymétrique*

Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E \setminus \{0\}$. On note $\alpha = \|a\|$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(x) = a \wedge x$.

1) Vérifier que $f^3 = -\alpha^2 f$.

2) On pose $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^k(x)}{k!}$. Simplifier $g(x)$ et en déduire que g est une rotation.

Exercice 16. *Matrice à trou*

1) Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.

2) Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17. *Matrice circulante*

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in [0, \frac{4}{27}]$.

Exercice 18. *Expressions analytiques*

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

1) $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$

7) $\begin{cases} 7x' = -2x + 6y - 3z \\ 7y' = 6x + 3y + 2z \\ 7z' = -3x + 2y + 6z \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} 3x' = 2x - 2y + z \\ 3y' = -2x - y + 2z \\ 3z' = x + 2y + 2z \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} 3x' = 2x + y + 2z \\ 3y' = 2x - 2y - z \\ 3z' = -x - 2y + 2z \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x' = -x + 3y - z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x - y - z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$ (étudier $f_{|\,\mathrm{Im}\, f}$).

Exercice 19. *Expression analytique*

Déterminer la matrice de la rotation $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée (i, j, k) telle que $\mathcal{R}(u) = u$ avec $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\mathcal{R}(i) = k$. Donner son angle de rotation.

solutions

Exercice 2.
$x = -\dfrac{a\wedge b}{\|a\|^2} + \lambda a.$

Exercice 3.
$p = [a,b,c] \Rightarrow u\wedge v = pb,\ v\wedge w = pc,\ w\wedge u = pa$ et $[u,v,w] = p^2$.
si $[u,v,w] < 0$: pas de solutions.
si $[u,v,w] = 0$ et $\mathrm{rg}(u,v,w) > 1$: pas de solutions.
si $[u,v,w] = 0$ et $\mathrm{rg}(u,v,w) \leqslant 1$: une infinité de solutions.
si $[u,v,w] > 0$: deux solutions.

Exercice 4.
3) $G = \mathrm{tr}(F)I - {}^tF$.

Exercice 6.
$abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = abc\sqrt{(\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)}$.

Exercice 8.
1) $f(x) = (x|u)u + \cos\alpha(u\wedge x)\wedge u + \sin\alpha(u\wedge x)$.
2) $M = (\cos\alpha)I + (1-\cos\alpha)\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix} + \sin\alpha\begin{pmatrix} 0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$.

Exercice 10.
Pour $f,g\in\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3)$, f et g ont la même matrice réduite dans une base orthonormée convenable, donc sont conjugués dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$. h n'est pas toujours positif car les bases peuvent ne pas avoir même orientation (ex : deux rotations inverses). Pour $f,g\in\mathcal{O}^-(\mathbb{R}^3)$, considérer $-f$, $-g$.

Exercice 11.
3) $\pi/2, \pi/2, \pi$ et $-\pi/2, \alpha, \pi/2$.

Exercice 13.
2) matrice dans une BOND.
3) $f = 2(h+\mathrm{id})^{-1} - \mathrm{id}$.

Exercice 14.
1) $f(x) = u\wedge x$ avec $u = (\alpha,\beta,\gamma)$.
2) $y = \dfrac{x + (u \mid x)u - u\wedge x}{1+\|u\|^2}$.
3) axe dirigé par u, $\cos\theta = \dfrac{1-\|u\|^2}{1+\|u\|^2}$, $\sin\theta = \dfrac{-2\|u\|}{1+\|u\|^2}$.

Exercice 15.
2) $g(x) = (\cos\alpha)x + (1-\cos\alpha)\dfrac{(a\mid x)a}{\alpha^2} + \dfrac{\sin\alpha(a\wedge x)}{\alpha}$.

Exercice 16.
1) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2\\ -2 & 6 & 3\\ 3 & -2 & 6\end{pmatrix}$.
2) rotation autour de $(1,1,1)$ d'angle $\arccos(\frac{11}{14})$.

Exercice 17.
Les conditions ${}^tMM = I$ et $\det(M) = 1$ équivalent à : $a+b+c = 1$ et $ab+ac+bc = 0$ d'où le polynôme P. P a trois racines réelles si et seulement si $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{4}{27}$ (étude de la fonction associée).

Exercice 18.

1) rotation autour de $(1,0,1)$ d'angle $-\arccos(1/3)$.
2) rotation autour de $(-3,1,1)$ d'angle $-\arccos(7/18)$.
3) demi-tour autour de $(-1,-2,1)$.
4) rotation autour de $(0,1,1)$ d'angle $2\pi/3$.
5) rotation autour de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ d'angle $\arccos(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}})$.
6) symétrie par rapport à $x = y + z$.
7) symétrie par rapport à $3x = 2y - z$.
8) symétrie par rapport à $x + 2y - z = 0$.
9) symétrie-rotation autour de $(1,-3,1)$ d'angle $-\arccos(5/6)$.
10) symétrie-rotation autour de $(1,-1,0)$ d'angle $\pi/3$.
11) projection sur $2x + 2y + z = 0$ puis rotation d'angle $\arccos(3/5)$.

Exercice 19.

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.