Endomorphismes auto-adjoints

Exercice 1. $A^2 = 0$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose ${}^tA = A$ et $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 2. *Comatrice d'une matrice symétrique*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\mathrm{com}(M)$ est aussi symétrique. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. *Base non orthonormée*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base arbitraire d'un ev euclidien E, G la matrice de Gram des e_i, $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.
1) Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.
2) Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.

Exercice 4. *autoadjoint ⇒ linéaire*
Soit E un ev préhilbertien et $u : E \to E$ telle que : $\forall\, x, y \in E$, $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$. Montrer que u est linéaire.

Exercice 5. *Diagonalisation de matrices symétriques*
Diagonaliser dans une base orthonormée :
1) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **2)** $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. *Diagonalisation de $C\,{}^tC$*
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $M = (a_ia_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Exercice 7. *Décomposition en projections orthogonales*
Soit φ l'endomorphisme de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe des projections orthogonales p, q et des réels λ, μ tels que : $\varphi = \lambda p + \mu q$, $p \circ q = 0$, $p + q = \mathrm{id}_E$.

Exercice 8. $2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X)$
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose pour $P, Q \in E$: $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on considère

$$u : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & 2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X). \end{cases}$$

1) Montrer que l'on définit un produit scalaire et que u est un endomorphisme.
2) Montrer que u est diagonalisable et que si P_k, P_ℓ sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes, alors $(P_k \mid P_\ell) = 0$.
3) Éléments propres de u pour $n = 3$?

Exercice 9. $(X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$
Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et $\varPhi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
1) Vérifier que $(P \mid Q)$ existe et qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que pour ce produit scalaire, $\varPhi$ est auto-adjoint (calculer $\int_{t=-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ par parties).
3) Déterminer les valeurs propres de $\varPhi$ et montrer qu'il existe une base propre de degrés étagés.

Exercice 10. $\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u = E$
Soit E un ev euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, u = E$.

Exercice 11. *$u \circ v$ autoadjoint ?*
Soient E euclidien et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 12. *Composée de projecteurs*
Soient p, q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E.
1) Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
2) Montrer que $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q) \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) = E$.
3) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 13. *Autoadjoint et orthogonal*
Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E à la fois auto-adjoints et orthogonaux ?

Exercice 14. *Spectre et rang d'une matrice antisymétrique*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
1) Montrer que les valeurs propres de M sont imaginaires pures.
2) Montrer que $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$. En déduire que $g = f_{|\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} f$.
3) Montrer que g^2 est diagonalisable. En déduire que $\operatorname{rg}(M)$ est pair.

Exercice 15. *Racine carrée*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$. Calculer B lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. *$A = {}^tBB$*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Exercice 17. *Décomposition de Cholesky*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.
1) Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\, i,\ T_{ii} > 0$.
2) Application : Montrer que $\det A \leqslant \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Exercice 18. *Mineurs principaux positifs*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on note Δ_p le déterminant de la sous-matrice $(a_{ij})_{i,j \in [\![1,p]\!]}$.
1) Montrer que si A est définie positive, alors tous les déterminants Δ_p sont strictement positifs.
2) Réciproque : on suppose $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B triangulaire supérieure inversible telle $A = {}^tBB$. En déduire que A est définie positive.

Exercice 19. *q positive $\Rightarrow q(x) = \|u(x)\|^2$*
Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique positive. Montrer qu'il existe un endomorphisme u auto-adjoint tel que : $\forall\, x \in E,\ q(x) = \|u(x)\|^2$.

Exercice 20. *A symétrique et $A^k = I$*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 21. *$\sum_{i,j} a_{ij}^2$*
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$.

Exercice 22. *u autoadjoint et $\operatorname{tr}(u) = 0$*
Soient E un ev euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint tel que $\operatorname{tr}(u) = 0$.
1) Montrer qu'il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) \perp x$.
2) En déduire qu'il existe une base orthonormée (e_i) telle que : $\forall\, i,\ (u(e_i) \mid e_i) = 0$.

Exercice 23. *Matrices symétriques commutant*
Soit (A_i) une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que : $\forall\, i,\ A_i = P_i(A)$.

Exercice 24. *Valeurs propres de AB*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, B définie positive. Montrer que les valeurs propres de AB sont réelles.

Exercice 25. $\operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives. Montrer que $0 \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Exercice 26. $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

Exercice 27. *f quelconque, il existe une BON dont l'image est orthogonale*

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ dont l'image par f est une famille orthogonale.

Exercice 28. *Quotients de Rayleigh*

Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint et $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.

1) Montrer : $\forall\, x \in E,\ \lambda_1\|x\|^2 \leqslant (f(x) \mid x) \leqslant \lambda_n\|x\|^2$.

2) Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $x \neq 0$, alors x est vecteur propre de f.

3) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(e_i) \mid e_i) = \lambda_i$. Montrer que : $\forall\, i,\ f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Exercice 29. $\operatorname{sp}(A+B)$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, λ, λ' leurs plus petites valeurs propres et μ, μ' leurs plus grandes valeurs propres. Montrer que toute valeur propre de $A+B$ est comprise entre $\lambda + \lambda'$ et $\mu + \mu'$.

Exercice 30. *Comparaison de valeurs propres*

Soient E un espace euclidien, $h \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, $x_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale sur $\operatorname{vect}(x_0)$, et $f = h + p$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de h et $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ celles de f. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n$.

Exercice 31. *Mines P' 1996*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Rightarrow f + f^* \in GL(E)$.

2) Montrer la réciproque lorsque l'on a $f^2 = 0$.

Exercice 32. *Rayon spectral*

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $|||f|||^2 = \max\{\lambda \text{ tq } \lambda \in \operatorname{sp}(f^* \circ f)\}$.

Exercice 33. *Calcul de norme*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \quad (x_1 - x_n, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}). \end{cases}$ Avec la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, calculer la norme de f.

Exercice 34. *Décomposition polaire d'un endomorphisme*

Soient E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) En considérant l'endomorphisme $f^* \circ f$, montrer que si f est inversible alors f se décompose de manière unique sous la forme $f = u \circ h$ avec u orthogonal et h autoadjoint positif.

2) Si f est non inversible, montrer qu'une telle décomposition existe mais n'est pas unique (on rappelle que $\mathcal{O}(E)$ est compact).

3) Montrer que l'application $f \mapsto (u, h)$ est continue sur $GL(E)$.

Exercice 35. *Endomorphismes normaux*

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1) Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable en base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(1) u est normal.
(2) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
(3) Tout sev stable par u est stable par u^*.
(4) Si un sev F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.
(5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

Exercice 36. $\|u(x)\| = \|v(x)\|$

Soit E un espace euclidien et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$(\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|) \Leftrightarrow (\exists w \in \mathcal{O}(E) \text{ tq } u = w \circ v).$$

Exercice 37. $(u(x) \mid x)$ *est réel*

Soit E un ev hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u = u^*$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $(u(x) \mid x)$ est réel.

Exercice 38. *Inégalité*

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint positif.
Montrer : $\forall x \in E,\ \|u(x)\|^4 \leqslant (x \mid u(x)) \times (u(x) \mid u^2(x))$.

Exercice 39. *Série d'autoadjoints positifs*

Soit H un espace de Hilbert et (u_n) une suite d'endomorphismes de H autoadjoints positifs continus telle que la suite $(u_0 + \ldots + u_n)$ est bornée dans $\mathcal{L}_c(H)$. Montrer que pour tout $x \in H$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est convergente.

Exercice 40. *Mines MP 2000*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = {}^tAA$. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, dans $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 41. *Centrale MP 2000 (avec Maple)*

Soit E un espace euclidien, u et v deux endomorphismes auto-adjoints de E, u étant défini positif.

1) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w tel que $u \circ w + w \circ u = v$. Que peut-on dire de w ?

2) On suppose E de dimension 3, rapporté à une base orthonormale dans laquelle u et v ont pour matrices respectives $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer w.

3) On revient au cas général. Si v est défini positif, que dire de w ? Si w est défini positif, que dire de v ?

Exercice 42. *Polytechnique MP* 2000*

Soit E un espace euclidien et s une symétrie de E.

1) Que dire de $s^* \circ s$?

2) Un polynôme P est dit réciproque si $P(X) = X^n P(1/X)$, pour P de degré n.
Montrer que : $P(X) = \det(X \operatorname{id} + s^* \circ s)$ est un polynôme réciproque.

3) Montrer que $P(1) \geqslant 2^n$. A quelle condition y a-til égalité ? Y a-t-il des conditions sur s ?

4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, carrée, d'ordre n, symétrique définie positive, où A_1 et A_4 sont carrées d'ordres respectifs p et q. Montrer que $\det(A) \leqslant \det(A_1)\det(A_4)$.

Exercice 43. *Cachan MP* 2000*

On note P l'ensemble des fonctions réelles f polynomiales par morceaux, continues sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0)=f(1)=0$. Si f et g sont des fonctions de P, on note $(f \mid g)=\int_{t=0}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Que dire de P muni de cette application ?

2) Montrer que si $x\in[0,1]$, il existe $g_x\in P$ telle que $\forall\, f\in P$, $(g_x \mid f)=f(x)$.

3) On considère n réels vérifiant : $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$ et on donne n réels $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. On pose $\varphi(f)=\|f\|^2+\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-\alpha_i)^2$ et on demande de trouver le minimum de φ sur P.

Exercice 44. *Centrale MP 2002*

1) Que peut-on dire de l'adjoint d'un projecteur orthogonal d'un espace euclidien ? Réciproque ?

2) Soit p un projecteur d'un espace euclidien tel que $p\circ p^*=p^*\circ p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 45. *IIE MP 2004*

Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(f \mid g)=\int_0^1 fg$.

Soient u,v les endomorphismes de E définis par $u(f)(x)=\int_0^x f$ et $v(f)(x)=\int_x^1 f$.

1) Montrer que $(u(f) \mid g)=(f \mid v(g))$.

2) Déterminer les valeurs propres de $u\circ v$.

Exercice 46. *Centrale MP 2004*

Soit E un espace euclidien de dimension n et p endomorphismes autoadjoints $u_1,\ldots,u_p$. Soit q_i la forme quadratique associée à u_i ($q_i(x)=(u_i(x) \mid x)$). On suppose :

$$\forall\, x\in E,\ q_1(x)+\ldots+q_p(x)=\|x\|^2 \quad \text{et}\ \ \mathrm{rg}(u_1)+\ldots+\mathrm{rg}(u_p)=n.$$

1) Montrer que $u_1+\ldots+u_p=\mathrm{id}_E$.

2) Montrer que $\mathrm{Im}(u_1)\oplus\ldots\oplus\mathrm{Im}(u_p)=E$.

3) Montrer que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme précédente est orthogonale.

Exercice 47. *Mines MP 2005*

Soit A matrice réelle ; montrer que A est diagonalisable ssi il existe S symétrique réelle définie positive telle que ${}^tA=SAS^{-1}$.

Exercice 48. *Rayon spectral, Centrale MP 2006*

Soient A,B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \max(\mathrm{sp}(A+tB)).\end{cases}$ Montrer que f est convexe.

Exercice 49. *ENS 2014*

Soit $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique laissant stable tous les sev $\mathbb{R}_n[X]$ (considérés comme des sous-espaces de E). Montrer qu'il existe une famille échelonnée (P_n) de polynômes propres pour u telle que pour toute fonction $f\in E$, on ait $f=\sum_{n=0}^{\infty}(P_n \mid f)P_n$.

Exercice 50. *Endomorphismes à spectres positifs, Mines 2013*

E est un espace euclidien, f et g deux endomorphismes symétriques dont les spectres sont inclus dans $\mathbb{R}^+$. Exprimer $\ker(f+g)$ et $\mathrm{Im}(f+g)$ en fonction de $\ker f$, $\ker g$, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Im}\, g$.

Exercice 51. *Spectre de la partie symétrique, TPE MP 2012*

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A_s sa partie symétrique et $\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n$ les valeurs propres de A_s. Montrer que toute valeur propre réelle de A est comprise entre α_1 et α_n.

solutions

Exercice 5.

1) $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(3,6,9)$.

2) $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(3,3,2)$.

Exercice 6.

Si tous les a_i sont nuls, $M = 0$.
Sinon, $M = C{}^tC \Rightarrow E_0 = C^\perp$ et $E_\nu = \mathrm{vect}(C)$ avec $\nu = \|C\|^2$.

Exercice 7.

$M = 5\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

2) u est autoadjoint pour $(\ \mid\ )$.
3) $P_0 = 1$, $P_2 = X$, $P_6 = 3X^2 - 1$, $P_{12} = 5X^3 - 3X$.

Exercice 9.

3) $\lambda_k = k(k+1)$.

Exercice 12.

3) $(p\circ q)_{\mid \mathrm{Im}\, p} = (p\circ q\circ p)_{\mid \mathrm{Im}\, p}$ est diagonalisable et $(p\circ q)_{\mid \mathrm{Ker}\, q + (\mathrm{Ker}\, p\cap \mathrm{Im}\, q)} = 0$ donc tout vecteur de E est somme de vecteurs propres pour $p\circ q$.

Exercice 15.

$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.

2) Récurrence : pour $n = 1$ c'est évident.
$n-1 \Rightarrow n$: $A = \begin{pmatrix} A' & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$ avec $A' = {}^tB'B'$.
On cherche $B = \begin{pmatrix} B' & X' \\ 0 & x \end{pmatrix}$ d'où : $X' = {}^tB'^{-1}C'$ et $x^2 = \alpha - {}^tX'X' = \dfrac{\det A}{\det A'} > 0$.

Exercice 22.

1) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base propre pour u. On prend $x = u_1 + \dots + u_n$.
2) On norme x et on le complète en une base orthonormée. La matrice de u dans cette base est symétrique, de trace nulle, et la diagonale commence par 0. On termine par récurrence.

Exercice 24.

$ABX = \lambda X \Rightarrow {}^tX{}^tBABX = \lambda{}^tXBX$.

Exercice 25.

Se ramener au cas où A est diagonale.

Exercice 26.

Il existe P inversible telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPB'P$ avec B' symétrique définie positive.
Alors $A + B = {}^tP(I + B')P$ et $\det(I + B') = \prod(1+\beta_i) \geqslant 1 + \prod \beta_i$.

Exercice 27.

Soit $\mathcal{B}$ une BON fixée, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathcal{B}'$ la BON cherchée et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On veut que ${}^tM'M'$ soit diagonale avec $M' = {}^tPMP$, cad ${}^tP{}^tMMP$ diagonale.

Exercice 30.

Soit (h_i) une base diagonale pour h, $H_i = \mathrm{vect}\{h_1, \dots, h_i\}$ et (f_i), F_i idem pour f.
Pour $x \in F_k \cap H_{k-1}^{\perp}$, $\lambda_k \|x\|^2 + (x \mid x_0)^2 \leqslant (h(x) \mid x) + (x \mid x_0)^2 = (f(x) \mid x) \leqslant \mu_k \|x\|^2$.
Pour $x \in H_{k+1} \cap F_{k-1}^{\perp} \cap x_0^{\perp}$, $\mu_k \|x\|^2 \leqslant (f(x) \mid x) = (h(x) \mid x) \leqslant \lambda_{k+1} \|x\|^2$.

Exercice 31.

1) Si $f(x)+f^*(x) = 0$ alors $f(x) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, f^* = \mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} = \mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ donc $f(x) = f^*(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f^* = \mathrm{Ker}\, f \cap (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$.

2) $f^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.
$f + f^* \in GL(E) \Rightarrow \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, f^* = \mathrm{Im}\, f + (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} = E \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f \geqslant \dim \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 33.

$f = \mathrm{id} - r$ où $r(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$. Donc $f^* \circ f = 2\,\mathrm{id} - r - r^{-1}$ a pour valeurs propres les nombres $2 - 2\cos(2k\pi/n)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $|\!|\!| f |\!|\!| = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2\cos(\pi/2n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exercice 37.

$((u - u^*)(x) \mid x) = 0$.

Exercice 38.

Orthodiagonaliser et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 39.

Soit $K = \sup\{|\!|\!| u_0 + \dots + u_n |\!|\!|\}$ et $x \in H$. On note $v_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n$ pour $p \leqslant q$. La série $\sum (u_n(x) \mid x)$ est convergente (termes positifs, sommes partielles majorées) donc elle vérifie le critère de Cauchy : $(v_{p,q}(x) \mid x) \underset{p,q \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $v_{p,q}$ est positif, il vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(v_{p,q}(x) \mid y)|^2 \leqslant (v_{p,q}(x) \mid x)(v_{p,q}(y) \mid y) \leqslant 2K\|y\|^2 (v_{p,q}(x) \mid x).$$

En particulier pour $y = v_{p,q}(x)$ on obtient : $\|v_{p,q}(x)\|^2 \leqslant 2K(v_{p,q}(x) \mid x)$ donc la série $\sum u_n(x)$ est de Cauchy.

Rmq. exemple où $\sum u_n$ ne converge pas dans $\mathcal{L}_c(H)$: $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et u_n = projection orthogonale sur $\langle e_n \rangle$ où $e_n(p) = \delta_{n,p}$. $\sum u_n$ converge simplement et non uniformément vers l'identité.

Exercice 40.

${}^tAA$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable donc annule un polynôme P scindé à racines simples. A annule le polynôme $P(X^3)$, donc est $\mathbb{C}$-diagonalisable si 0 n'est pas racine de P ce que l'on peut imposer si A est inversible.

Si A n'est pas inversible, soit $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
On a $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A^3) \oplus \mathrm{Ker}(Q(A^3))$ et $\mathrm{Ker}(A^3) = \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ donc $AQ(A^3) = 0$ et A est encore $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Contre-exemple pour la $\mathbb{R}$-diagonalisabilité : prendre une rotation d'angle $2\pi/3$ dans le plan.

Exercice 41.

1) On se place dans une base propre pour u, soient U, V, W les matrices associées avec $U = \mathrm{diag}(\lambda_i)$. On doit donc résoudre $(\lambda_i + \lambda_j)W_{ij} = V_{ij}$ d'où l'existence, l'unicité et la symétrie de w.

2)
```
> A := matrix([[4,1,1],[1,4,-1],[1,-1,4]]);
  B := matrix([[0,0,-1],[0,0,1],[-1,1,3]]);
> eigenvals(A); eigenvects(A);
> P := transpose(matrix([[1, 0, 1], [1, 1, 0],[-1, 1, 1]]));
> A1 := evalm(P^(-1)&*A&*P); B1 := evalm(P^(-1)&*B&*P);
> C1 := matrix(3,3);
> for i from 1 to 3 do
    for j from 1 to 3 do C1[i,j] := B1[i,j]/(A1[i,i]+A1[j,j]) od
  od;
> C := evalm(P&*C1&*P^(-1)); evalm(A&*C+C&*A-B);
```
$\Rightarrow C = \dfrac{1}{140}\begin{pmatrix} 11 & -11 & -33 \\ -11 & 11 & 33 \\ -33 & 33 & 69 \end{pmatrix}$.

3) Si v est défini positif : on a $(v(x) \mid x) = 2(u(x) \mid w(x))$ donc si λ est une valeur propre de w et x est un vecteur propre associé, on a $\lambda = \dfrac{(v(x) \mid x)}{2(u(x) \mid x)} > 0$ d'où w est défini positif.

Cas w défini positif et v non positif : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4x+4 \end{pmatrix}$ avec $0 < x < \frac{1}{8}$.

Exercice 42.

1) c'est un endomorphisme autoadjoint positif de déterminant 1.

2) $X^n \det(\mathrm{id}/X + s^* \circ s) = \det(\mathrm{id} + Xs^* \circ s) = \det(s^* \circ (\mathrm{id} + Xs^* \circ s) \circ s) = \det(s^* \circ s + X\,\mathrm{id})$.

3) $s^* \circ s$ est diagonalisable avec des valeurs propres (λ_i) réelles positives deux à deux inverses pour la même multiplicité. $P^2(1) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n}(1+\lambda_i)(1+1/\lambda_i)$ et $(1+x)(1+1/x) \geqslant 4$ pour tout $x > 0$ avec égalité ssi $x = 1$.

Si $P(1) = 2^n$ alors toutes les valeurs propres de $s^* \circ s$ valent 1 et $s^* \circ s$ est diagonalisable donc $s^* \circ s = \mathrm{id}$ et s est une symétrie orthogonale. La réciproque est immédiate.

4) Se ramener au cas $A_4 = I$ puis calculer $\det A$ par pivotage.

Exercice 43.

1) Que c'est un espace préhilbertien.

2) $g_x(t) = \min(t(1-x), x(1-t))$

3) On note $g_i = g_{x_i}$: $(g_1, \dots, g_n)$ est libre par considération des points anguleux, donc engendre un ev G de dimension n. Soit $f \in P$: $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in G$ et $f_1 \in G^\perp$. Alors $\varphi(f) = \varphi(f_0) + \|f_1\|^2$ donc φ est minimale en f ssi $\varphi_{|G}$ est minimale en f_0 et $f_1 = 0$. Désormais on suppose $f_1 = 0$ et $f \in G$.

L'application :

$$u : \begin{cases} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_n)) = ((f \mid g_1), \dots, (f \mid g_n)) \end{cases}$$

est un isomorphisme linéaire. Soit v l'endormophisme autoadjoint défini positif de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) tel que : $\forall\, t \in \mathbb{R}^n$, $(t \mid v(t)) = \|u^{-1}(t)\|^2$.
On a donc en notant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\mathrm{id} + v)^{-1}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(u^{-1}(t)) &= (t \mid v(t)) + (t - \alpha \mid t - \alpha) \\ &= (t \mid (\mathrm{id} + v)(t)) - 2(t \mid \alpha) + (\alpha \mid \alpha) \\ &= (t - \beta \mid (\mathrm{id} + v)(t - \beta)) + (\alpha \mid \alpha - \beta). \end{aligned}$$

$\mathrm{id} + v$ est autoadjoint défini positif donc le minimum de φ est atteint pour $f = u^{-1}(\beta)$ (solution unique) et vaut $(\alpha \mid \alpha - \beta)$.

Exercice 44.

1) p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p$ est un projecteur et $p = p^* \Leftrightarrow p^*$ est un projecteur orthogonal.

2) p et p^* commutent donc $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par p et par p^*, d'où $p^*_{|\operatorname{Ker} p} = (p_{|\operatorname{Ker} p})^* = 0_{\operatorname{Ker} p}$ et $p^*_{|\operatorname{Im} p} = (p_{|\operatorname{Im} p})^* = \mathrm{id}_{\operatorname{Im} p}$. Ainsi $p = p^*$ ce qui implique $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$.

Exercice 45.

2) On a pour $f, g \in E$: $u \circ v(f) = g \Leftrightarrow g$ est $\mathcal{C}^2$, $g(0) = g'(1) = 0$ et $g'' = -f$. En particulier $u \circ v$ est injectif, 0 n'est pas valeur propre de $u \circ v$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in E$ on a $u \circ v(f) = \lambda f$ si et seulement si f est de la forme $x \mapsto ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ avec $\alpha^2 = -1/\lambda$ et $a + b = a\alpha e^{\alpha} - b\alpha e^{-\alpha} = 0$. On obtient $f \neq 0$ en prenant $a \neq 0$, $b = -a$ et $\alpha = i\pi(\frac{1}{2} + k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\operatorname{sp}(u \circ v) = \left\{ \dfrac{1}{\pi^2(\frac{1}{2} + k)^2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 46.

1) $u_1 + \ldots + u_p$ est l'endomorphisme autoadjoint associé à $q_1 + \ldots + q_p$.

2) $\operatorname{Im}(u_1) + \ldots + \operatorname{Im}(u_p) \supset \operatorname{Im}(u_1 + \ldots + u_p) = E$ et la somme des dimensions est égale à $\dim E$ donc la somme des sous-espaces est directe.

3) On a $\operatorname{Ker}(u_1) = \{x \in E \text{ tq } x = u_2(x) + \ldots + u_p(x)\} \subset \operatorname{Im}(u_2 + \ldots + u_p) = \operatorname{Im}(u_2) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im}(u_p)$ et les deux termes extrêmes ont même dimension, d'où $\operatorname{Ker}(u_1) = \operatorname{Im}(u_2) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im}(u_p)$. Comme u_1 est autoadjoint, $\operatorname{Im}(u_1) \perp \operatorname{Ker}(u_1)$ ce qui prouve l'orthogonalité de la somme. De plus $\operatorname{Im}(u_1) \subset \operatorname{Ker}(u_j)$ pour $j \geqslant 1$ donc $q_1(x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \operatorname{Im}(u_1)$. En appliquant **1)** à $\operatorname{Im}(u_1)$ on obtient $u_1(x) = x$ pour tout $x \in \operatorname{Im}(u_1)$ ce qui prouve que u_1 est un projecteur, et c'est un projecteur orthogonal car autoadjoint.

Exercice 47.

$A = P^{-1}DP \Rightarrow {}^tA = ({}^tPP)A(P^{-1}\,{}^tP^{-1})$.
S définie positive $\Rightarrow \exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = {}^tPP$, donc ${}^tA = SAS^{-1} \Rightarrow {}^tA = {}^tPM\,{}^tP^{-1}$ avec $M = PAP^{-1}$, d'où ${}^tM = M$ est diagonale.

Exercice 48.

Pour A symétrique réelle on a $\max(\operatorname{sp}(A)) = \sup\{(x \mid Ax)/\|x\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ donc f est la borne supérieure des fontions affines $t \mapsto ((x \mid Ax) + t(x \mid Bx))/\|x\|^2$ lorsque x décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En tant que sup de fonctions convexes, c'est une fonction convexe.

Exercice 49.

$u_{|\mathbb{R}_n[X]}$ est symétrique et laisse stable $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc aussi son orthogonal dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension 1. Soit P_n un polynôme de norme 1 dans cet orthogonal. Par construction, P_n est propre pour u, de degré n et la suite (P_n) est orthonormale. C'est une suite totale car $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E pour $\|\ \|_\infty$ donc aussi pour $\|\ \|_2$.

Exercice 50.

Soit $x \in \ker(f+g)$. On a alors $(f(x)+g(x)|x) = 0 = (f(x)|x) + (g(x)|x)$. Or f et g sont symétriques, donc $(f(x)+g(x)|x) = 0$ si et seulement si $(f(x)|x) = (g(x)|x) = 0$. Si $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f et si $x = \sum_{i=1}^p x_i$ ($x_i \in E_{\lambda_i}(f)$) on a $(f(x)|x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \|x_i\|^2$. On en déduit que $(f(x)|x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$. On en déduit que $\ker(f+g) \subset \ker f \cap \ker g$. L'inclusion inverse est claire, donc $\ker(f+g) = \ker f \cap \ker g$. Pour des sous-espaces vectoriels F, G d'un espace euclidien on a $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ (vrai même dans un préhilbertien). On passe aux orthogonaux et on obtient $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. L'endomorphisme $f + g$ est symétrique donc $\operatorname{Im}(f+g) = (\ker(f+g))^\perp = (\ker f \cap \ker g)^\perp = (\ker f)^\perp + (\ker g)^\perp = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ (car f et g sont symétriques).

Exercice 51.

Si $AX = \lambda X$ alors $\lambda\|X\|^2 = (X|AX) = (X|A_sX)$ est compris entre $\alpha_1\|X\|^2$ et $\alpha_n\|X\|^2$.